Les Fonctions polynômes du second degré

Récapitulatif de cours

Représentation graphique

Une fonction polynôme du second degré est une fonction du type $f(x) = ax^2 + bx + c$ définie sur $\mathbb{R}$.

Sa courbe représentative est une parabole.

- Si $a > 0$, alors la parabole est dite « tête en bas » (exemple : la fonction carrée).
- Si $a < 0$, alors la parabole est dite « tête en haut ».

On appelle le point $S(\alpha\,;\beta)$ le sommet de la parabole.

- Si la parabole est « tête en bas », alors le sommet est le point de la parabole ayant la plus basse ordonnée.
- Si la parabole est « tête en haut », alors le sommet est le point de la parabole ayant la plus haute ordonnée.

On a :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

Les différentes formes d'expressions

L'expression d'une fonction polynôme de degré 2 peut être sous différentes formes :

- La forme développée : $f(x) = ax^2 + bx + c$

- La forme factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$, où les appelles aussi les racines de f.

- La forme canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Les équations du second degré

Résoudre une équation du type $f(x) = 0$ avec f une fonction polynôme de degré 2 revient à résoudre une équation du second degré.

Une équation du second degré est donc du type :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Pour résoudre ce type d'équation, il nous faut dans un premier temps calculer le discriminant que l'on note Δ.

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles x_1 et x_2.

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \ et \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution réelle x_1, on dit que c'est une racine double*.

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b}{2a}}$$

*La forme factorisée de la fonction f est alors $f(x) = a(x - x_1)^2$, on dit x_1 est une racine double car nous avons deux facteurs $(x - x_1)$.

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution réelle.

À noter :

Soit f une fonction polynôme du second degré.

- S'il n'y a pas de solutions réelles de l'équation $f(x) = 0$ alors il n'y a pas de forme factorisée sur $\mathbb{R}$ de l'expression de f.
- S'il n'y a pas de forme factorisée sur $\mathbb{R}$ de l'expression de f, alors il n'y a pas de solutions réelles de l'équation $f(x) = 0$.

Exercices

Exercice 1

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$.

On sait que :

- $f(2) = 6$
- L'ordonnée à l'origine est 4.
- Le point $(1\,;3)$ appartient à la représentation graphique de f.

Quelle est l'expression de la fonction f ?

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 20x + 4$.
Donner la forme canonique de cette fonction en utilisant deux méthodes différentes.

Exercice 3

Résoudre l'équation du second degré suivante :

$$2x^2 - 8x + 3 = 0$$

Pour plus d'exercices, n'hésitez pas à visiter mon site.
poppy-sciences.com

Corrigés

Exercice 1

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$.

On sait que :

- $f(2) = 6$
- L'ordonnée à l'origine est 4.
- Le point $(1\,;3)$ appartient à la représentation graphique de f.

Quelle est l'expression de la fonction f ?

Une fonction polynôme du second degré est une fonction du type $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ définie sur $\mathbb{R}$. Nous devons donc trouver les valeurs de a, b et c.

- Comme L'ordonnée à l'origine est 4, on a $f(0) = 4$.
  Or, $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$.
  Donc $c = 4$.

- Comme $f(2) = 6$, on a $a \times 2^2 + b \times 2 + 4 = 6$, donc $4a + 2b + 4 = 6$.

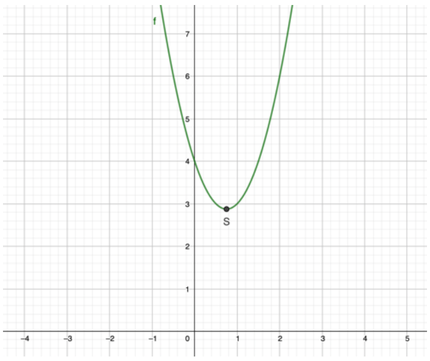
- Comme le point $(1\,;3)$ appartient à la représentation graphique de f, on a $f(1) = 3$, donc : $a \times 1^2 + b \times 1 + 4 = 3$, donc $a + b + 4 = 3$.

Pour trouver a et b, il nous faut maintenant résoudre un système à deux équations.

$$\begin{cases} a + b + 4 = 3 \\ 4a + 2b + 4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - 4 - a = -a - 1 \\ 4a + 2(-a - 1) + 4 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a - 1 \\ 4a - 2a - 2 + 4 = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -a - 1 \\ 2a + 2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 - 1 \\ a = \dfrac{4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

Donc l'expression de la fonction f est $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$.



Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 20x + 4$.
Donner la forme canonique de cette fonction en utilisant deux méthodes différentes.

1ère méthode :

$$f(x) = \mathbf{4x^2 - 20x} + 4$$

$$f(x) = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2 - 5^2 + 4$$

$$f(x) = (2x-5)^2 - 25 + 4$$

$$f(x) = (2x-5)^2 - 21$$

$$f(x) = \left(2\left(x - \frac{5}{2}\right)\right)^2 - 21$$

$$f(x) = 2^2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - 21$$

$$f(x) = 4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - 21$$

2ème méthode :

$$\boldsymbol{f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta}$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-20)}{2 \times 4} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$$\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{5}{2}\right) = 4 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 20 \times \frac{5}{2} + 4 = 4 \times \frac{25}{4} - 10 \times 5 + 4 = 25 - 50 + 4 = -21$$

Donc :

$$f(x) = 4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - 21$$

Exercice 3

Résoudre l'équation du second degré suivante :

$$2x^2 - 8x + 3 = 0$$

Pour résoudre ce type d'équation, il nous faut dans un premier temps calculer le discriminant que l'on note Δ.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 64 - 24 = 40 = \left(2\sqrt{10}\right)^2 > 0$$

Donc l'équation admet deux solutions réelles x_1 et x_2.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) - 2\sqrt{10}}{2 \times 2} = \frac{8 - 2\sqrt{10}}{4} = \frac{4 - \sqrt{10}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) + 2\sqrt{10}}{2 \times 2} = \frac{8 + 2\sqrt{10}}{4} = \frac{4 + \sqrt{10}}{2}$$

$$S = \left\{\frac{4 - \sqrt{10}}{2} ; \frac{4 + \sqrt{10}}{2}\right\}$$

Pour plus d'exercices, n'hésitez pas à visiter mon site.
poppy-sciences.com