Arithmétique

Rappels

Les ensembles

Les entiers naturels

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels. Il contient tous les nombres entiers positifs ou nul.

$$\textit{Exemples} : \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$$

Les entiers relatifs

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs. Il contient tous les nombres entiers positifs, négatifs, ou nul.

$$\textit{Exemples} : \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

Les nombres décimaux

$\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous forme d'une fraction décimale, donc sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 $(0{,}001\ ;\ 0{,}01\ ;\ 0{,}1\ ;\ 1\ ;\ 10\ ;\ 100\ ;\ 1000\ ;\ \dots)$.

$$\textit{Exemples} : \left\{-50 = -\frac{50}{1}; \frac{1}{10}; \frac{2}{100}; \frac{34}{1000}; 2 = \frac{20}{10}; \dots\right\}$$

Les nombres rationnels

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble quotient, aussi appelé l'ensemble des nombres rationnels. Il contient tous les nombres pouvant s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs, autrement dit, pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction tels que le numéro et le dénominateur soient des entiers relatifs.

$$\textit{Exemples} : \left\{-50; \frac{1}{10}; \frac{2}{100}; \frac{2}{3}; \frac{4}{5}; \frac{22}{357} \dots\right\}$$

Les nombres réels

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels. Il contient tous les nombres de la droite graduée.

$$\textit{Exemples} : \left\{-50; \frac{1}{10}; \frac{22}{357}; \sqrt{3}; \pi\right\}$$

Les nombres irrationnels

Les nombres irrationnels sont compris dans $\mathbb{R}$ mais ne sont pas compris dans $\mathbb{Q}$. Ce sont tous les nombres ne pouvant pas s'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers relatifs.

$$\textit{Exemples} : \{\sqrt{3}; \sqrt{5}; \pi\}$$

Vocabulaire

- Si l'égalité trouvé lors d'une division euclidienne est de ce type :
  $a = b \times c$, alors on dit que :
  - → a est **divisible** par b et par c.
  - → b et c sont des **diviseurs** de a.
  - → a est un **multiple** de b et de c.

  Exemple : $736 = 8 \times 92$

  Donc je déduis que :
  - → 736 est **divisible** par 8 et par 92.
  - → 8 et 92 sont des **diviseurs** de 736.
  - → 736 est un **multiple** de 8 et de 92.

- Si l'égalité trouvé lors d'une division euclidienne est de ce type :
  $a = b \times c + r$ avec $r \neq 0$, alors :
  - → a n'est pas **divisible** par b et par c.
  - → b et c ne sont pas des **diviseurs** de a.
  - → a n'est pas un **multiple** de b et de c.

  Exemple : $743 = 8 \times 92 + 7$

  Donc je déduis que :
  - → 743 n'est pas **divisible** par 8 et par 92.
  - → 8 et 92 ne sont pas des **diviseurs** de 743.
  - → 743 n'est pas un **multiple** de 8 et de 92.

Critères de divisibilité

Un nombre est divisible par :

- **2** s'il se **termine** par **0, 2, 4, 6, ou 8**.
- **3** si la **somme de ces chiffres** est un **multiple de 3**.
- **4** si le nombre formé par les **deux derniers chiffres** est un **multiple de 4**.
- **5** s'il se **termine** par **0 ou 5**.
- **9** si la **somme de ces chiffres** est un **multiple de 9**.

Définition d'un nombre premier

Un nombre premier est un nombre qui a uniquement deux diviseurs 1 et lui-même.

Définition PGCD

Le PGCD de a et b est le plus grand diviseur commun à a et à b.

Définition PPCM

Le PPCM de a et b est le plus petit multiple commun à a et à b.

Exercices

Exercice 1

Donner le plus petit ensemble de nombre auquel appartient chacun des nombres suivants.

$$\frac{2}{3}\ ;\ \frac{\sqrt{5}}{6}\ ;\ -\sqrt{36}\times\frac{1}{2}$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, donner le plus petit ensemble de nombre auquel appartient chacun des nombres suivants.

$$-2n-4\ ;\ \frac{n}{2}\times\sqrt{5}\ ;\ \frac{n}{n+1}\ ;\ \sqrt{2n}\ ;\ \frac{n}{\sqrt{81}}$$

Exercice 3

Donner la liste des diviseurs de chacun des nombres suivants.

$$48\ ;\ 108\ ;\ 136$$

Exercice 4

Donner la définition d'un nombre premier.

Exercice 5

Soient les nombres suivants :

$$11\,025\ ;\ 252\ ;\ 26\,460$$

1) Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers.

2) En déduire $PGCD(11\,025\,;252)$ et $PGCD(11\,025\,;26\,460)$.

Exercice 6

A l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers, donner chaque fraction sous sa forme irréductible.

$$\frac{144}{60}\ ;\ \frac{225}{12\,375}\ ;\ \frac{396}{462}$$

Exercice 7

Vrai ou Faux ? Justifier.

1) Si n est un nombre premier, alors le nombre $2^n - 1$ est un nombre premier.
2) Si a et b sont des nombres premiers distincts, alors la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible.
3) Si a et b sont deux nombres premiers différents de 2, alors $a + b$ n'est jamais un nombre premier.

Exercice 8

Voici un programme de calcul :

Choisir un nombre entier relatif. Multiplier ce nombre par 5. Ajouter 2. Soustraire au résultat la somme du double du nombre de départ et de -4.

Elodie affirme que le résultat est toujours un multiple de 3. A-t-elle raison ?

Corrigés

Exercice 1

Donner le plus petit ensemble de nombre auquel appartient chacun des nombres suivants.

$$\frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \ ; \ \frac{\sqrt{5}}{6} \in \mathbb{R} \ ; \ -\sqrt{36} \times \frac{1}{2} = -6 \times \frac{1}{2} = -\frac{6}{1} \times \frac{1}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \in \mathbb{Z}$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, donner le plus petit ensemble de nombre auquel appartient chacun des nombres suivants.

$$-2n - 4 \in \mathbb{Z} \ ; \ \frac{n}{2} \times \sqrt{5} \in \mathbb{R} \ ; \ \frac{n}{n+1} \in \mathbb{Q} \ ; \ \sqrt{2n} \in \mathbb{R} \ ; \ \frac{n}{\sqrt{81}} = \frac{n}{9} \in \mathbb{Q}$$

Exercice 3

Donner la liste des diviseurs de chacun des nombres suivants.

48 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48

108 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 27 ; 36 ; 54 ; 108

136 : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 17 ; 34 ; 68 ; 136

Exercice 4

Donner la définition d'un nombre premier.

Un nombre premier est un nombre qui a uniquement deux diviseurs 1 et lui-même.

Exercice 5

Soient les nombres suivants : 11 025 ; 252 ; 26 460

1) Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers.

11025	3
3675	3
1225	5
245	5
49	7
7	7
1	

252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

26 460	2
13 230	2
6615	3
2205	3
735	3
245	5
49	7
7	7
1	

$11025 = 3^2 \times 5^2 \times 7^2$ $\quad$ $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$ $\quad$ $26\,460 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7^2$

2) En déduire $PGCD(11\,025\,;252)$ et $PGCD(11\,025\,;26\,460)$.

$$252 = 2^2 \times \mathbf{3^2} \times \mathbf{7}$$
$$11025 = 3^2 \times 5^2 \times 7^2 = \mathbf{3^2} \times 5^2 \times 7 \times \mathbf{7}$$

$$PGCD(11\,025\,;252) = \mathbf{3^2} \times \mathbf{7} = 63$$

$$11025 = 3^2 \times 5^2 \times 7^2 = \mathbf{3^2} \times \mathbf{5} \times 5 \times \mathbf{7^2}$$
$$26\,460 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7^2 = 2^2 \times \mathbf{3^2} \times 3 \times \mathbf{5} \times \mathbf{7^2}$$

$$PGCD(11\,025\,;26\,460) = \mathbf{3^2} \times \mathbf{5} \times \mathbf{7^2} = 2205$$

Exercice 6

A l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers, donner chaque fraction sous sa forme irréductible.

$$\frac{144}{60} \quad ; \quad \frac{225}{12\,375} \quad ; \quad \frac{396}{462}$$

$$144 = 2^4 \times 3^2$$
$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$\frac{144}{60} = \frac{2^4 \times 3^2}{2^2 \times 3 \times 5} = \frac{\mathbf{2^2} \times 2^2 \times \mathbf{3} \times 3}{\mathbf{2^2} \times \mathbf{3} \times 5} = \frac{2^2 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$$

$$225 = 3^2 \times 5^2$$
$$12\,375 = 3^2 \times 5^3 \times 11$$

$$\frac{225}{12\,375} = \frac{3^2 \times 5^2}{3^2 \times 5^3 \times 11} = \frac{\mathbf{3^2} \times \mathbf{5^2}}{\mathbf{3^2} \times \mathbf{5^2} \times 5 \times 11} = \frac{1}{5 \times 11} = \frac{1}{55}$$

$$396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$$
$$462 = 2 \times 3 \times 7 \times 11$$

$$\frac{396}{462} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 11}{2 \times 3 \times 7 \times 11} = \frac{2 \times \mathbf{2} \times \mathbf{3} \times 3 \times \mathbf{11}}{\mathbf{2} \times \mathbf{3} \times 7 \times \mathbf{11}} = \frac{2 \times 3}{7} = \frac{6}{7}$$

Exercice 7

Vrai ou Faux ? Justifier.

1) Si n est un nombre premier, alors le nombre $2^n - 1$ est un nombre premier.

Prenons $n = 11$, on a $2^{11} - 1 = 2047$, or $2047 = 23 \times 89$, donc c'est faux.

2) Si a et b sont des nombres premiers distincts, alors la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible.

Un nombre premier n'a que deux diviseurs, 1 et lui-même, donc a et b n'ont pas de diviseur commun autre que 1, donc la fraction est irréductible, c'est vrai.

3) Si a et b sont deux nombres premiers différents de 2, alors $a + b$ n'est jamais un nombre premier.

Comme nous prenons que des nombres premiers différents de 2 (donc 3, 5, 7, 11, 13, …), nous avons que des nombres impairs (car un nombre premier n'admet que deux diviseurs, 1 et lui-même, et donc n'est pas un multiple de 2 s'il est différent de 2). Or, la somme de deux nombres de même parité donne un nombre pair, ici nous faisons la somme de deux nombres impairs, donc le résultat est toujours pair, il est un multiple de 2 strictement supérieur à 2, donc il n'est pas un nombre premier. C'est vrai.

Exercice 8

Voici un programme de calcul :

> Choisir un nombre entier relatif.
> Multiplier ce nombre par 5.
> Ajouter 2.
> Soustraire au résultat la somme du double du nombre de départ et de -4.

Elodie affirme que le résultat est toujours un multiple de 3. A-t-elle raison ?

Soit $z \in \mathbb{Z}$, et p la fonction qui à $z \in \mathbb{Z}$ associe le résultat du programme ci-dessus.

La somme du double du nombre de départ et de -4 signifie la somme du double de z et de -4. C'est-à-dire $2z + (-4)$. On trouve donc :

$p(z) = z \times 5 + 2 - \left(2z + (-4)\right)$
$p(z) = 5z + 2 - 2z + 4$
$p(z) = 3z + 6$
$p(z) = 3(z + 2)$

Donc le résultat est toujours un multiple de 3.