



LES SUITES

Rappels

1) Définition :

Une **Suite** est une **Fonction** défini sur \mathbb{N} ou partie de \mathbb{N} .

Rappel : \mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels.

- ❖ On nomme souvent les suites u , v ou w .
- ❖ Soit la fonction f définie sur \mathbb{N} , la fonction explicite de notre suite (u_n) .

$$\text{On a : } f(n) = u_n \text{ et } f \Leftrightarrow (u_n)$$

On parle donc du **terme** u_n d'une **suite** (u_n) .

2) 2 façons de définir une suite :

1ère façon :

Nous pouvons définir une suite en donnant la **fonction explicite liée à cette suite**.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_n = 5n^2 - 2$.

2ème méthode :

Nous pouvons définir une suite **par récurrence**, c'est-à-dire en donnant son **premier terme**, et en exprimant u_{n+1} en fonction de u_n .

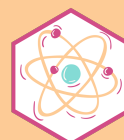
Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 4$.

3) 3 méthodes différentes pour étudier le sens de variation d'une suite :

1ère méthode :

Prenons une suite (u_n) définie sur \mathbb{N} . Pour savoir si (u_n) est croissante ou décroissante, nous pouvons calculer $u_{n+1} - u_n$.

- ❖ Si $u_{n+1} - u_n > 0$, alors $u_{n+1} > u_n$, donc la suite (u_n) est **croissante**.
- ❖ Si $u_{n+1} - u_n < 0$, alors $u_{n+1} < u_n$, donc la suite (u_n) est **décroissante**.
- ❖ Si $u_{n+1} - u_n = 0$, alors $u_{n+1} = u_n$, donc la suite (u_n) est **constante**.





Exemple 1 :

$$u_n = 5n + 4, n \in \mathbb{N}$$

$$u_{n+1} - u_n = 5(n + 1) + 4 - (5n + 4)$$

$$u_{n+1} - u_n = 5n + 5 + 4 - 5n - 4$$

$$u_{n+1} - u_n = 5 > 0$$

$u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est **croissante**.

2^{ème} méthode :

Uniquement si : Pour tout n de notre ensemble, $u_n > 0$ ou $u_n < 0$.

Cas où $u_n > 0$:

- ❖ Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors $u_{n+1} > u_n$ donc $(u_n) \nearrow$
- ❖ Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors $u_{n+1} < u_n$ donc $(u_n) \searrow$
- ❖ Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors $u_{n+1} = u_n$ donc (u_n) est constante.

Cas où $u_n < 0$:

- ❖ Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors $u_{n+1} < u_n$ donc $(u_n) \searrow$
- ❖ Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors $u_{n+1} > u_n$ donc $(u_n) \nearrow$
- ❖ Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors $u_{n+1} = u_n$ donc (u_n) est constante.

Exemple 2 :

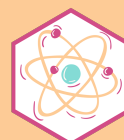
$$\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = v_n \times \frac{1}{5} \end{cases} \quad \forall n, v_n > 0$$

Comme $\forall n, v_n > 0$, on peut utiliser la méthode 2, et donc calculer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n \times \frac{1}{5}}{v_n}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{5} < 1$$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, donc la suite (v_n) est **décroissante**.





3^{ème} méthode :

Chercher les **variations** de la **fonction explicite** liée à la suite.

Exemple 3 :

$$W_n = 2(n - 4)^2 - 3, n \in \mathbb{N}$$

La fonction explicite liée à cette suite est :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto 2(n - 4)^2 - 3 \end{array}$$

Son sens de variation est le même que celui de la fonction polynôme de degré 2 définie sur \mathbb{R} par sa forme canonique $g(x) = 2(x - 4)^2 + 3$.

$a = 2 > 0$, donc le sens de variation de g est défini comme suit :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
g $a = 2 > 0$			

Le sens de variation de g est le même que f , et donc le même que (W_n) .

On conclut alors que la suite (W_n) est **décroissante** entre **0 et 4**, puis **croissante** de **4 à $+\infty$** .

4) Les suites Majorée, Minorée et Bornée

Une suite majorée

Soit (u_n) une suite définie sur D .

Si $\exists M \in \mathbb{R}$, tel que $\forall n \in D, u_n \leq M$, alors (u_n) est **majorée** et M est un **majorant** de (u_n) .

Une suite minorée

Soit (u_n) une suite définie sur D .

Si $\exists m \in \mathbb{R}$, tel que $\forall n \in D, u_n \geq m$, alors (u_n) est **minorée** et m est un **minorant** de (u_n) .

Une suite Bornée

Soit (u_n) une suite définie sur D .

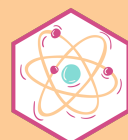
Si (u_n) est **majorée** ET **minorée**, alors elle est **bornée**.

“

Aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce support sans l'autorisation expresse de l'auteur.

© 2022 Poppy & Sciences : Mélanie Demars

”





Exercices

Exercice 1

Pour chacune des suites (u_n) suivantes, calculer : a) le cinquième terme ; b) le terme de rang 5 ; c) u_6 .

1) (u_n) est une suite de premier terme $u_1 = 10$, et dont chaque terme (sauf le premier) est égal au terme précédent auquel on ajoute 10.

2) (u_n) est la suite définie pour $n \geq 2$ par : $u_n = 3n^2 - 4n + 2$.

3) u est la suite définie pour $n \geq 1$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ \forall n \geq 1 : u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n \end{cases}$$

4) (u_n) est une suite de premier terme $u_0 = 2$, et dont chaque terme (sauf le premier) est égal au double du terme précédent.

5) (u_n) est la suite définie pour $n \geq 4$ par : $u_n = -3n^2 + n$.

6) u est la suite définie pour $n \geq 2$ par :

$$\begin{cases} u_2 = -5 \\ \forall n \geq 2 : u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$$

Exercice 2

Les suites suivantes sont-elles **croissantes** ? sont-elles **décroissantes** ?

$$u_n = 10 - 2n, n \in \mathbb{N}$$

$$v_n = n^2 + 5, n \in \mathbb{N}$$

$$w_n = 3(n + 2), n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ \forall n \geq 2 : x_{n+1} = 2x_n + 3 \end{cases}$$

Pour plus d'exercices, n'hésitez pas à visiter mon site.

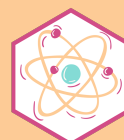
poppy-sciences.com

“

Aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce support sans l'autorisation expresse de l'autrice.

© 2022 Poppy & Sciences : Mélanie Demars

”





Corrigés

Exercice 1

Pour chacune des suites (u_n) suivantes, calculer : **a)** le cinquième terme ; **b)** le terme de rang 5 ; **c)** u_6 .

- 1) (u_n) est une suite de premier terme $u_4 = 10$, et dont chaque terme (sauf le premier) est égal au terme précédent auquel on ajoute 10.

$$u_4 = 10$$

$$\text{b) } u_5 = 10 + 10 = 20$$

$$\text{c) } u_6 = 20 + 10 = 30$$

$$u_7 = 30 + 10 = 40$$

$$\text{a) } u_8 = 40 + 10 = 50$$

- 2) (u_n) est la suite définie pour $n \geq 2$ par : $u_n = 3n^2 - 4n + 2$.

$$u_2 = 3 \times 2^2 - 4 \times 2 + 2 = 12 - 8 + 2 = 12 - 6 = 6$$

$$\text{a) c) } u_6 = 3 \times 6^2 - 4 \times 6 + 2 = 3 \times 36 - 24 + 2 = 108 - 22 = 86$$

$$\text{b) } u_5 = 3 \times 5^2 - 4 \times 5 + 2 = 3 \times 25 - 20 + 2 = 75 - 18 = 57$$

- 3) u est la suite définie pour $n \geq 1$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ \forall n \geq 1 : u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n \end{cases}$$

$$u_1 = 2$$

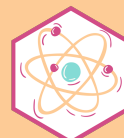
$$u_2 = \frac{3}{5} \times u_1 = \frac{3}{5} \times 2 = \frac{6}{5}$$

$$u_3 = \frac{3}{5} \times u_2 = \frac{3}{5} \times \frac{6}{5} = \frac{18}{25}$$

$$u_4 = \frac{3}{5} \times u_3 = \frac{3}{5} \times \frac{18}{25} = \frac{54}{125}$$

$$\text{a) b) } u_5 = \frac{3}{5} \times u_4 = \frac{3}{5} \times \frac{54}{125} = \frac{162}{625}$$

$$\text{c) } u_6 = \frac{3}{5} \times u_5 = \frac{3}{5} \times \frac{162}{625}$$





- 4) (u_n) est une suite de premier terme $u_0 = 2$, et dont chaque terme (sauf le premier) est égal au double du terme précédent.

$$u_0 = 2$$

$$u_1 = 4$$

$$u_2 = 8$$

$$u_3 = 16$$

a) $u_4 = 32$

b) $u_5 = 64$

c) $u_6 = 128$

- 5) (u_n) est la suite définie pour $n \geq 4$ par : $u_n = -3n^2 + n$.

a) $u_8 = -3 \times 8^2 + 8 = -3 \times 64 + 8 = -192 + 8 = -184$

b) $u_5 = -3 \times 5^2 + 5 = -3 \times 25 + 5 = -75 + 5 = -70$

c) $u_6 = -3 \times 6^2 + 6 = -3 \times 36 + 6 = -108 + 6 = -102$

- 6) u est la suite définie pour $n \geq 2$ par :

$$\begin{cases} u_2 = -5 \\ \forall n \geq 2 : u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$$

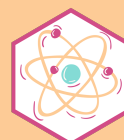
$$u_2 = -5$$

$$u_3 = 3 \times (-5) + 1 = -15 + 1 = -14$$

$$u_4 = 3 \times (-14) + 1 = -42 + 1 = -41$$

b) $u_5 = 3 \times (-41) + 1 = -123 + 1 = -122$

a) c) $u_6 = 3 \times (-122) + 1 = -366 + 1 = -365$





Exercice 2

Les suites suivantes sont-elles **croissantes** ? sont-elles **décroissantes** ?

$$u_n = 10 - 2n, n \in \mathbb{N}$$

$$u_{n+1} - u_n = (10 - 2(n + 1)) - (10 - 2n)$$

$$u_{n+1} - u_n = 10 - 2n - 2 - 10 + 2n$$

$$u_{n+1} - u_n = -2 < 0$$

$$u_{n+1} < u_n$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

$$v_n = n^2 + 5, n \in \mathbb{N}$$

$$v_{n+1} - v_n = (n + 1)^2 + 5 - (n^2 + 5)$$

$$v_{n+1} - v_n = n^2 + 2n + 1 + 5 - n^2 - 5$$

$$v_{n+1} - v_n = 2n + 1$$

$$n \geq 0$$

$$2n \geq 0$$

$$2n + 1 > 0$$

$$v_{n+1} - v_n > 0$$

$$v_{n+1} > v_n$$

Donc la suite (v_n) est croissante.

$$w_n = 3(n + 2), n \in \mathbb{N}$$

$$w_n = 3n + 6$$

$$w_{n+1} - w_n = 3(n + 1) + 6 - (3n + 6)$$

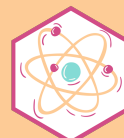
$$w_{n+1} - w_n = 3(n + 1) + 6 - (3n + 6)$$

$$w_{n+1} - w_n = 3n + 3 + 6 - 3n - 6$$

$$w_{n+1} - w_n = 3 > 0$$

$$w_{n+1} > w_n$$

Donc la suite (w_n) est croissante.





$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ \forall n \geq 2 : x_{n+1} = 2x_n + 3 \end{cases}$$

Dans ce cas, nous allons fonctionner à l'aide d'inégalité pour comparer x_{n+1} et x_n .

Avant tout, on va démontrer par récurrence que x_n est toujours supérieur à 1, cela nous sera utile pour établir des inégalités.

Montrons par récurrence que $\forall n \geq 2, x_n > 1$.

Initialisation :

$$x_2 = 2 > 1$$

La proposition est vraie au rang $n = 2$.

Hérédité :

Supposons que notre proposition est vraie au rang k , montrons qu'elle est vraie au rang $k + 1$.

Supposons que $x_k > 1$ montrons que $x_{k+1} > 1$.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 2x_k + 3 \\ \text{Comme } x_k > 1, \text{ on a :} \\ 2x_k &> 2 > 1 \\ 2x_k + 3 &> 5 > 1 \\ \text{Donc } x_{k+1} &> 1 \end{aligned}$$

Donc si la proposition est vraie au rang k , alors elle est vraie au rang $k + 1$.

Conclusion :

Comme la proposition est vraie au rang $n = 2$ et que si la proposition est vraie au rang k , alors elle est vraie au rang $k + 1$, alors $x_n > 1 \forall n \geq 2$.

Comme $x_n > 1$ alors $2x_n > x_n$ et donc $2x_n + 3 > x_n$, donc $x_{n+1} > x_n$.

Donc la suite est croissante.

Pour plus d'exercices, n'hésitez pas à visiter mon site.

poppy-sciences.com

“
Aucune reproduction,
même partielle, autres que celles prévues
à l'article L 122-5 du code de la
propriété intellectuelle, ne peut être faite
de ce support sans l'autorisation
expresse de l'auteur.
© 2022 Poppy & Sciences : Mélanie Demars
”

