Les Suites

Rappels

1) Définition :

Une **Suite** est une **Fonction** défini sur $\mathbb{N}$ ou partie de $\mathbb{N}$.

Rappel : $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.

- On nomme souvent les suites $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ ou $\boldsymbol{w}$.

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{N}$, la fonction explicite de notre suite (u_n).

On a : $\boldsymbol{f(n) = u_n}$ et $\boldsymbol{f \Leftrightarrow (u_n)}$

On parle donc du terme u_n d'une suite (u_n).

2) 2 façons de définir une suite :

1ère façon :

Nous pouvons définir une suite en donnant la fonction explicite liée à cette suite.

Exemple : La suite $(\boldsymbol{u_n})$ définie par $\boldsymbol{u_n = 5n^2 - 2}$.

2ème méthode :

Nous pouvons définir une suite **par récurrence**, c'est-à-dire en donnant son premier terme, et en exprimant u_{n+1} en fonction de u_n.

Exemple : La suite $(\boldsymbol{u_n})$ définie par $\boldsymbol{u_0 = 2}$ et $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + 4}$.

3) 3 méthodes différentes pour étudier le sens de variation d'une suite :

1ère méthode :

Prenons une suite $(\boldsymbol{u_n})$ définie sur $\mathbb{N}$. Pour savoir si $(\boldsymbol{u_n})$ est croissante ou décroissante, nous pouvons calculer $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$.

- Si $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n > 0}$, alors $\boldsymbol{u_{n+1} > u_n}$, donc la suite $(\boldsymbol{u_n})$ est **croissante**.
- Si $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n < 0}$, alors $\boldsymbol{u_{n+1} < u_n}$, donc la suite $(\boldsymbol{u_n})$ est **décroissante**.
- Si $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n = 0}$, alors $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n}$, donc la suite $(\boldsymbol{u_n})$ est **constante**.

Exemple 1 :

$$u_n = 5n + 4, n \in \mathbb{N}$$

$$u_{n+1} - u_n = 5(n+1) + 4 - (5n+4)$$

$$u_{n+1} - u_n = 5n + 5 + 4 - 5n - 4$$

$$u_{n+1} - u_n = 5 > 0$$

$u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est **croissante**.

2ème méthode :

Uniquement si : **Pour tout n de notre ensemble, $u_n > 0$ ou $u_n < 0$.**

Cas où $u_n > 0$:

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors $u_{n+1} > u_n$ donc (u_n) ↗
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors $u_{n+1} < u_n$ donc (u_n) ↘
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors $u_{n+1} = u_n$ donc (u_n) **est constante**.

Cas où $u_n < 0$:

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors $u_{n+1} < u_n$ donc (u_n) ↘
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors $u_{n+1} > u_n$ donc (u_n) ↗
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors $u_{n+1} = u_n$ donc (u_n) **est constante**.

Exemple 2 :

$$\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = v_n \times \frac{1}{5} \end{cases} \qquad \forall n, V_n > 0$$

Comme $\forall n, V_n > 0$, on peut utiliser la méthode 2, et donc calculer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n \times \frac{1}{5}}{v_n}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{5} < 1$$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$, donc la suite (v_n) est **décroissante**.

3ème méthode :

Chercher les **variations** de la **fonction explicite** liée à la suite.

Exemple 3 :

$$W_n = 2(n-4)^2 - 3\ , n \in \mathbb{N}$$

La fonction explicite liée à cette suite est :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \rightarrow \quad \mathbb{Z} \\ n \mapsto 2(n-4)^2 - 3 \end{array}$$

Son sens de variation est le même que celui de la fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique $g(x) = 2(x-4)^2 + 3$.
$a = 2 > 0$, donc le sens de variation de g est défini comme suit :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
g $a = 2 > 0$	↘	3	↗

Le sens de variation de g est le même que f, et donc le même que (W_n).

On conclut alors que la suite (W_n) est **décroissante** entre 0 et 4, puis **croissante** de 4 à $+\infty$.

4) Les suites Majorée, Minorée et Bornée

Une suite majorée

Soit (u_n) une suite définie sur D.
Si $\exists M \in \mathbb{R}$, tel que $\forall n \in D$, $u_n \leq M$, alors (u_n) est **majorée** et M est un **majorant** de (u_n).

Une suite minorée

Soit (u_n) une suite définie sur D.
Si $\exists m \in \mathbb{R}$, tel que $\forall n \in D$, $u_n \geq m$, alors (u_n) est **minorée** et m est un **minorant** de (u_n).

Une suite Bornée

Soit (u_n) une suite définie sur D.
Si (u_n) est **majorée** ET **minorée**, alors elle est **bornée**.

Exercices

Exercice 1

Pour chacune des suites (u_n) suivantes, calculer : a) le cinquième terme ; b) le terme de rang 5 ; c) u_6.

1) (u_n) est une suite de premier terme $u_4 = 10$, et dont chaque terme (sauf le premier) est égal au terme précédent auquel on ajoute 10.

2) (u_n) est la suite définie pour $n \geq 2$ par : $u_n = 3n^2 - 4n + 2$.

3) u est la suite définie pour $n \geq 1$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ \forall n \geq 1 : u_{n+1} = \frac{3}{5} u_n \end{cases}$$

4) (u_n) est une suite de premier terme $u_0 = 2$, et dont chaque terme (sauf le premier) est égal au double du terme précédent.

5) (u_n) est la suite définie pour $n \geq 4$ par : $u_n = -3n^2 + n$.

6) u est la suite définie pour $n \geq 2$ par :

$$\begin{cases} u_2 = -5 \\ \forall n \geq 2 : u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$$

Exercice 2

Les suites suivantes sont-elles **croissantes** ? sont-elles **décroissantes** ?

$$u_n = 10 - 2n \, , n \in \mathbb{N}$$

$$v_n = n^2 + 5 \, , n \in \mathbb{N}$$

$$w_n = 3(n + 2) \, , n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ \forall n \geq 2 : x_{n+1} = 2x_n + 3 \end{cases}$$

Pour plus d'exercices, n'hésitez pas à visiter mon site.

poppy-sciences.com

Corrigés

Exercice 1

Pour chacune des suites (u_n) suivantes, calculer : a) le cinquième terme ; b) le terme de rang 5 ; c) u_6.

1) (u_n) est une suite de premier terme $u_4 = 10$, et dont chaque terme (sauf le premier) est égal au terme précédent auquel on ajoute 10.

$u_4 = 10$
b) $u_5 = 10 + 10 = 20$
c) $u_6 = 20 + 10 = 30$
$u_7 = 30 + 10 = 40$
a) $u_8 = 40 + 10 = 50$

2) (u_n) est la suite définie pour $n \geq 2$ par : $u_n = 3n^2 - 4n + 2$.

$u_2 = 3 \times 2^2 - 4 \times 2 + 2 = 12 - 8 + 2 = 12 - 6 = 6$

a) c) $u_6 = 3 \times 6^2 - 4 \times 6 + 2 = 3 \times 36 - 24 + 2 = 108 - 22 = 86$
b) $u_5 = 3 \times 5^2 - 4 \times 5 + 2 = 3 \times 25 - 20 + 2 = 75 - 18 = 57$

3) u est la suite définie pour $n \geq 1$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ \forall n \geq 1 : u_{n+1} = \frac{3}{5} u_n \end{cases}$$

$u_1 = 2$
$u_2 = \frac{3}{5} \times u_1 = \frac{3}{5} \times 2 = \frac{6}{5}$
$u_3 = \frac{3}{5} \times u_2 = \frac{3}{5} \times \frac{6}{5} = \frac{18}{25}$
$u_4 = \frac{3}{5} \times u_3 = \frac{3}{5} \times \frac{18}{25} = \frac{54}{125}$
a) b) $u_5 = \frac{3}{5} \times u_4 = \frac{3}{5} \times \frac{54}{125} = \frac{162}{625}$
c) $u_6 = \frac{3}{5} \times u_5 = \frac{3}{5} \times \frac{162}{625}$

4) (u_n) est une suite de premier terme $u_0 = 2$, et dont chaque terme (sauf le premier) est égal au double du terme précédent.

$u_0 = 2$

$u_1 = 4$

$u_2 = 8$

$u_3 = 16$

a) $u_4 = 32$

b) $u_5 = 64$

c) $u_6 = 128$

5) (u_n) est la suite définie pour $n \geq 4$ par : $u_n = -3n^2 + n$.

a) $u_8 = -3 \times 8^2 + 8 = -3 \times 64 + 8 = -192 + 8 = -184$

b) $u_5 = -3 \times 5^2 + 5 = -3 \times 25 + 5 = -75 + 5 = -70$

c) $u_6 = -3 \times 6^2 + 6 = -3 \times 36 + 6 = -108 + 6 = -102$

6) u est la suite définie pour $n \geq 2$ par :

$$\begin{cases} u_2 = -5 \\ \forall n \geq 2 : u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$$

$u_2 = -5$

$u_3 = 3 \times (-5) + 1 = -15 + 1 = -14$

$u_4 = 3 \times (-14) + 1 = -42 + 1 = -41$

b) $u_5 = 3 \times (-41) + 1 = -123 + 1 = -122$

a) c) $u_6 = 3 \times (-122) + 1 = -366 + 1 = -365$

Exercice 2

Les suites suivantes sont-elles **croissantes** ? sont-elles **décroissantes** ?

$$u_n = 10 - 2n \,, n \in \mathbb{N}$$

$$u_{n+1} - u_n = \big(10 - 2(n+1)\big) - (10 - 2n)$$

$$u_{n+1} - u_n = 10 - 2n - 2 - 10 + 2n$$

$$u_{n+1} - u_n = -2 < 0$$

$$u_{n+1} < u_n$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

$$v_n = n^2 + 5 \,, n \in \mathbb{N}$$

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 5 - (n^2 + 5)$$

$$v_{n+1} - v_n = n^2 + 2n + 1 + 5 - n^2 - 5$$

$$v_{n+1} - v_n = 2n + 1$$

$$n \geq 0$$

$$2n \geq 0$$

$$2n + 1 > 0$$

$$v_{n+1} - v_n > 0$$

$$v_{n+1} > v_n$$

Donc la suite (v_n) est croissante.

$$w_n = 3(n+2) \,, n \in \mathbb{N}$$

$$w_n = 3n + 6$$

$$w_{n+1} - w_n = 3(n+1) + 6 - (3n + 6)$$

$$w_{n+1} - w_n = 3(n+1) + 6 - (3n + 6)$$

$$w_{n+1} - w_n = 3n + 3 + 6 - 3n - 6$$

$$w_{n+1} - w_n = 3 > 0$$

$$w_{n+1} > w_n$$

Donc la suite (w_n) est croissante.

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ \forall n \geq 2 : x_{n+1} = 2x_n + 3 \end{cases}$$

Dans ce cas, nous allons fonctionner à l'aide d'inégalité pour comparer x_{n+1} et x_n.

Avant tout, on va démontrer par récurrence que x_n est toujours supérieur à 1, cela nous sera utile pour établir des inégalités.

Montrons par récurrence que $\forall n \geq 2$, $x_n > 1$.

Initialisation :

$$x_2 = 2 > 1$$

La proposition est vraie au rang $n = 2$.

Hérédité :

Supposons que notre proposition est vraie au rang k, montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$.
Supposons que $x_k > 1$ montrons que $x_{k+1} > 1$.

$$x_{k+1} = 2x_k + 3$$

Comme $x_k > 1$, on a :

$$2x_k > 2 > 1$$

$$2x_k + 3 > 5 > 1$$

Donc $x_{k+1} > 1$

Donc si la proposition est vraie au rang k, alors elle est vraie au rang $k+1$.

Conclusion :

Comme la proposition est vraie au rang $n = 2$ et que si la proposition est vraie au rang k, alors elle est vraie au rang $k+1$, alors $x_n > 1$ $\forall n \geq 2$.

Comme $x_n > 1$ alors $2x_n > x_n$ et donc $2x_n + 3 > x_n$, donc $x_{n+1} > x_n$.

Donc la suite est croissante.

Pour plus d'exercices, n'hésitez pas à visiter mon site.

poppy-sciences.com