Les Fonctions et Dérivées

Rappels

Fonctions	Dérivés
$\boldsymbol{x}$	1
$\boldsymbol{ax}\,;\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$	a
$\boldsymbol{b}\,;\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$	0
$\boldsymbol{ax+b}\,;\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$	a
$\boldsymbol{x^2}$	$2x$
$\boldsymbol{x^n}$	nx^{n-1}
$\boldsymbol{\frac{1}{x}}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\boldsymbol{e^x}$	e^x
$\boldsymbol{u+v}$	$u'+v'$
$\boldsymbol{u \times v}$	$u'v+uv'$
$\boldsymbol{\frac{1}{v}}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\boldsymbol{\frac{u}{v}}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$\boldsymbol{e^u}$	$u'e^u$

Exercices

Exercice 1

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes puis les dériver.

$$f(x) = 2x^3 + 5$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x$$

$$h(x) = \frac{5x+3}{2x-1}$$

$$j(x) = \frac{-1}{3x^2+5x+6}$$

Exercice 2

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes puis dresser leur tableau de variation.

$$f(x) = 3x^3 + x$$

$$g(x) = 2x^3 + \frac{4}{5}x$$

$$h(x) = \frac{4x+7}{-x-1}$$

$$j(x) = \frac{3x}{x^2+2x+3}$$

Corrigés

Exercice 1

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes puis les dériver.

$$\boldsymbol{f(x) = 2x^3 + 5}$$

f est définie sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2 \times 3x^2$$
$$f'(x) = 6x^2$$

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x}$$

g est définie sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times x + 3$$
$$g'(x) = 1 \times x + 3$$
$$g'(x) = x + 3$$

$$\boldsymbol{h(x) = \frac{5x+3}{2x-1}}$$

On cherche la/les valeur(s) interdite(s) :

$$2x - 1 = 0$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$ est une valeur interdite (elle annule le dénominateur).

Donc h est définie sur $\mathbb{R}/\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$$h(x) = \frac{u}{v}$$

$$u = 5x + 3 \; et \; u' = 5$$
$$v = 2x - 1 \; et \; v' = 2$$

$$h'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$h'(x) = \frac{5 \times (2x-1) - (5x+3) \times 2}{(2x-1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{5 \times (2x-1) - 2 \times (5x+3)}{(2x-1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{10x - 5 - 10x - 6}{(2x-1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-11}{(2x-1)^2}$$

$$\boldsymbol{j(x) = \frac{-1}{3x^2 + 5x + 6}}$$

On cherche la/les valeur(s) interdite(s) :

$$3x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times 6$$
$$\Delta = 25 - 72$$
$$\Delta = -47$$

$\Delta > 0$, donc le polynôme n'a pas de racines réelles,
Aucune valeur n'annule le dénominateur.
Donc j est définie sur $\mathbb{R}$.

$$j(x) = -\frac{1}{v}$$

$$v = 3x^2 + 5x + 6 \text{ et } v' = 6x + 5$$

$$j'(x) = -\frac{-v'}{v^2} = \frac{v'}{v^2}$$

$$j'(x) = \frac{6x + 5}{(3x^2 + 5x + 6)^2}$$

Exercice 2

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes puis dresser leur tableau de variation.

$$\boldsymbol{f(x) = 3x^3 + x}$$

f est définie sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 9x^2 + 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4 \times 9 \times 1 = -36$$

$\Delta < 0$ donc le polynôme est du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f		$\nearrow$	

$$\boldsymbol{g(x) = 2x^3 + \frac{4}{5}x}$$

g est définie sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 6x^2 + \frac{4}{5}$$

$$x^2 \geq 0$$
$$6x^2 \geq 0$$
$$6x^2 + \frac{4}{5} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g		$\nearrow$	

$$\boldsymbol{h(x) = \frac{4x+7}{-x-1}}$$

On cherche la/les valeur(s) interdite(s) :

$$-x-1=0$$
$$-x=1$$
$$x=-1$$

-1 est une valeur interdite.

h est définie sur $\mathbb{R}/\{-1\}$.

$$h(x) = \frac{u}{v}$$

$$u = 4x+7 \ et\ u' = 4$$
$$v = -x-1 \ et\ v' = -1$$

$$h'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$h'(x) = \frac{4 \times (-x-1) - (4x+7) \times (-1)}{(-x-1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-4x - 4 + 4x + 7}{(-x-1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{3}{(-x-1)^2}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
3	$+$	‖	$+$
$(-x-1)^2$	$+$	‖	$+$
$g'(x)$	$+$	‖	$+$
g	↗	‖	↗

$$j(x) = \frac{3x}{x^2 + 2x + 3}$$

On cherche la/les valeur(s) interdite(s) :

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8$$

$\Delta < 0$ donc il n'y a aucune racine réelle. Aucune valeur n'annule le dénominateur.

j est définie sur $\mathbb{R}$.

$$j(x) = \frac{u}{v}$$

$$u = 3x \ et \ u' = 3$$
$$v = x^2 + 2x + 3 \ et \ v' = 2x + 2$$

$$j'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$j'^{(x)} = \frac{3 \times (x^2 + 2x + 3) - 3x \times (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 3)^2}$$

$$j'(x) = \frac{3x^2 + 6x + 9 - 6x^2 - 6x}{(x^2 + 2x + 3)^2}$$

$$j'(x) = \frac{-3x^2 + 9}{(x^2 + 2x + 3)^2}$$

$$-3x^2 + 9 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = -4 \times (-3) \times 9 = 108$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 = \frac{-\sqrt{108}}{2 \times (-3)} \quad et \quad x_2 = \frac{\sqrt{108}}{2 \times (-3)}$$
$$x_1 = \sqrt{3} \qquad x_2 = -\sqrt{3}$$

x	$-\infty$ $\qquad$ $\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$+\infty$
$-3x^2+9$	$+$ $(Signe\ de\ -a)$	$-$ $(Signe\ de\ a)$	$+$ $(Signe\ de\ -a)$
$(x^2+2x+3)^2$	$+$	$+$	$+$
$g'(x)$	$+$	$-$	$+$
g	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$