Les Variables Aléatoires

Exercices

Exercice 1

On s'intéresse ici à plusieurs dés truqués à 6 faces. Dans tous les cas indiqués, X est la variable aléatoire qui donne le chiffre obtenu lors du lancer de dé.

Partie 1 : Dé truqué n°1

1) Compléter la loi de probabilité de ce dé. Justifier sur votre copie.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,025	0,05	0,1	0,2	0,4	

2) Donner l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X pour le 1er dé.

Partie 2 : Dé truqué n°2

Compléter la loi de probabilité de ce dé, sachant que la probabilité de faire un « 6 » est deux fois plus grande que celle de faire un « 5 ». Justifier sur votre copie.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,1	0,1		

Partie 3 : Dé truqué n°3

Compléter la loi de probabilité de ce dé, sachant que la probabilité de faire un « 6 » est le carré de celle de faire un « 5 ». Arrondir au centième. Justifier sur votre copie.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,1	0,1		

Exercice 2

Un casino a décidé d'installer un nouveau jeu pour ses habitués. Une machine affiche un écran tactile avec 200 rectangles identiques, sur lesquels le joueur peut appuyer. Pour cela il mise 2 euros.
Puis une fois qu'un des rectangles est pressé, il affiche le résultat :

- 2 rectangles permettent au joueur de gagner 24€.
- 4 rectangles permettent au joueur de gagner 12€.
- 10 rectangles permettent au joueur de gagner 5€.
- 54 rectangles permettent au joueur de gagner 0,50€.
- pour les autres rectangles, le joueur ne gagne rien.

Soit G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur.

1) Quelles sont les valeurs prises par G ?
2) Établir la loi de probabilité de G.
3) Calculer l'espérance de G. Interpréter.
4) Le directeur du casino trouve que le gain apporté par ce nouveau jeu est faible pour son entreprise. Il a fait installer 4 machines. Sur chacune des machines passent 70 clients par jour. Le directeur souhaite que les machines lui rapportent 336 € au total sur une journée. Pour cela il modifie le gain de la valeur maximale. À combien doit-il fixer ce gain pour espérer un tel revenu ?

Pour plus d'exercices, n'hésitez pas à visiter mon site.
poppy-sciences.com

Corrigés

Exercice 1

On s'intéresse ici à plusieurs dés truqués à 6 faces. Dans tous les cas indiqués, X est la variable aléatoire qui donne le chiffre obtenu lors du lancer de dé.

Partie 1 : Dé truqué n°1

1) Compléter la loi de probabilité de ce dé. Justifier sur votre copie.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,025	0,05	0,1	0,2	0,4	0,225

$$P(X = 6) = 1 - \sum_{i=1}^{5} P(X = x_i) = 1 - (0{,}025 + 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4) = 0{,}225$$

2) Donner l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X pour le 1er dé.

$$E(X) = 0{,}025 \times 1 + 0{,}05 \times 2 + 0{,}1 \times 3 + 0{,}2 \times 4 + 0{,}4 \times 5 + 0{,}225 \times 6 = 4{,}575$$

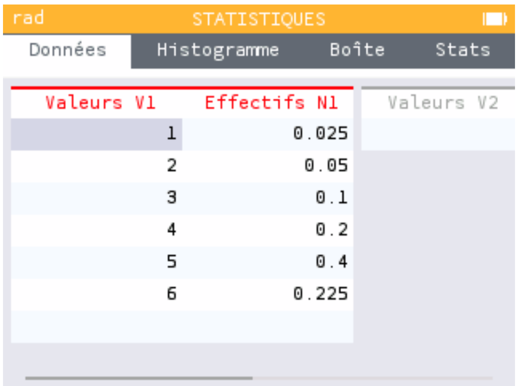
$$\boldsymbol{V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(P(X = x_i)(x_i - E(X))^2\right)}$$

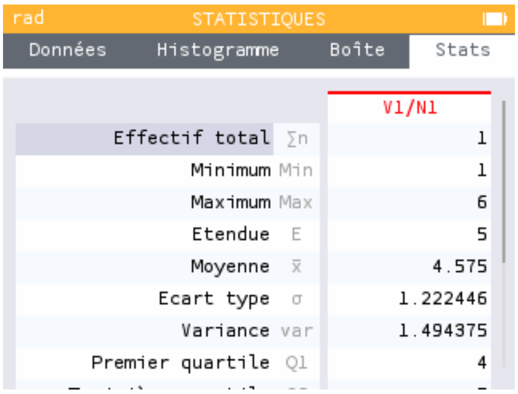
$$V(X) = 0{,}025 \times (1 - 4{,}575)^2 + 0{,}05 \times (2 - 4{,}575)^2 + 0{,}1 \times (3 - 4{,}575)^2 + 0{,}2 \times (4 - 4{,}575)^2 + 0{,}4 \times (5 - 4{,}575)^2 + 0{,}225 \times (6 - 4{,}575)^2$$

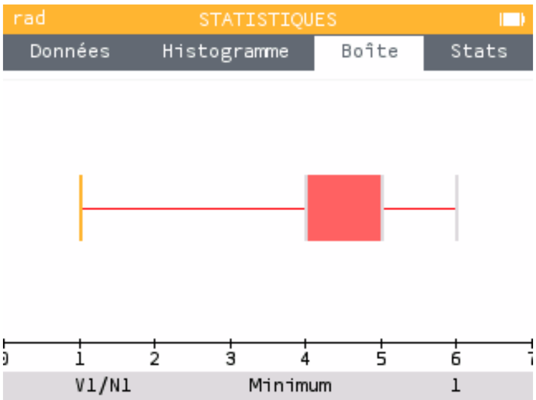
$$V(X) = 1{,}49$$

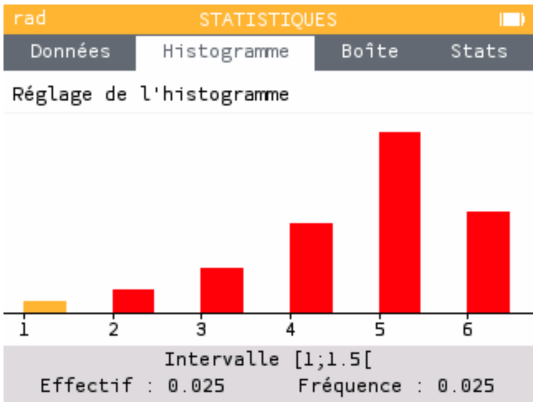
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1{,}49} = 1{,}22$$

Ce que l'on trouve à la calculatrice :









Partie 2 : Dé truqué n°2

Compléter la loi de probabilité de ce dé, sachant que la probabilité de faire un « 6 » est deux fois plus grande que celle de faire un « 5 ». Justifier sur votre copie.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,4

D'après l'énoncé, on a :

$$P(X = 6) = 2P(X = 5)$$

$$P(X = 5) = 1 - \sum_{i=1}^{4} P(X = x_i) - 2P(X = 5)$$

$$3P(X = 5) = 1 - \sum_{i=1}^{4} P(X = x_i)$$

$$3P(X = 5) = 0{,}6$$

$$P(X = 5) = \frac{0{,}6}{3} = 0{,}2$$

$$P(X = 6) = 2P(X = 5) = 2 \times 0{,}2 = 0{,}4$$

Partie 3 : Dé truqué n°3

Compléter la loi de probabilité de ce dé, sachant que la probabilité de faire un « 6 » est le carré de celle de faire un « 5 ». Arrondir au centième. Justifier sur votre copie.

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,1	0,1	$\frac{-1+\sqrt{3,4}}{2}$	$\frac{11-\sqrt{85}}{10}$

D'après l'énoncé, on a :

$$P(X = 6) = P(X = 5)^2$$

$$P(X = 5) = 1 - \sum_{i=1}^{4} P(X = x_i) - P(X = 5)^2$$

$$P(X = 5) = 0{,}6 - P(X = 5)^2$$

$$P(X = 5)^2 + P(X = 5) - 0{,}6 = 0$$

Cela revient à résoudre :

$$x^2 + x - 0{,}6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-0{,}6) = 3{,}4 > 0$$

Donc on a deux solutions.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{3{,}4}}{2} < 0$$

Donc x_1 n'est pas une solution possible.

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3{,}4}}{2} > 0$$

Donc :

$$P(X = 5) = \frac{-1 + \sqrt{3{,}4}}{2}$$

$$P(X = 6) = P(X = 5)^2 = \frac{11 - \sqrt{85}}{10}$$

Exercice 2

Un casino a décidé d'installer un nouveau jeu pour ses habitués. Une machine affiche un écran tactile avec 200 rectangles identiques, sur lesquels le joueur peut appuyer. Pour cela il mise 2 euros.
Puis une fois qu'un des rectangles est pressé, il affiche le résultat :

- 2 rectangles permettent au joueur de gagner 24€.
- 4 rectangles permettent au joueur de gagner 12€.
- 10 rectangles permettent au joueur de gagner 5€.
- 54 rectangles permettent au joueur de gagner 0,50€.
- pour les autres rectangles, le joueur ne gagne rien.

Soit G la variable aléatoire correspondant au **gain algébrique** du joueur.

1) Quelles sont les valeurs prises par G ?

Les valeurs prises par G sont 22 ; 10 ; 3 ; -1,5 et 2.

2) Établir la loi de probabilité de G.

x_i	**22**	**10**	**3**	**-1,5**	**-2**
$P(X = x_i)$	**0,01**	**0,02**	**0,05**	**0,27**	**0,65**

3) Calculer l'espérance de G. Interpréter.

$$E(X) = 0{,}01 \times 22 + 0{,}02 \times 10 + 0{,}05 \times 3 + 0{,}27 \times (-1{,}5) + 0{,}65 \times (-2) = -1{,}135$$

Le Casino peut espérer gagner en moyenne 1,135€ par joueur.

4) Le directeur du casino trouve que le gain apporté par ce nouveau jeu est faible pour son entreprise. Il a fait installer 4 machines. Sur chacune des machines passent 70 clients par jour. Le directeur souhaite que les machines lui rapportent 336 € au total sur une journée. Pour cela il modifie le gain de la valeur maximale. À combien doit-il fixer ce gain pour espérer un tel revenu ?

$$70 \times 4 = 280\ clients/jour$$

$$\frac{336}{280} = 1{,}2\ €$$

Donc l'espérance devrait être de -1,2€.

Donc il faut résoudre :

$$E(X) = 0{,}01 \times (x - 2) + 0{,}02 \times 10 + 0{,}05 \times 3 + 0{,}27 \times (-1{,}5) + 0{,}65 \times (-2) = -1{,}2$$

Pour plus d'exercices, n'hésitez pas à visiter mon site.

poppy-sciences.com