Équations Cartésiennes

Révisions

- Si deux **droites** (AB) et (CD) sont **parallèles**, alors les **vecteurs** $\overrightarrow{AB}(x, y)$ et $\overrightarrow{DC}(x', y')$ sont dits **colinéaires**.
  On a alors qu'un vecteur est multiple de l'autre, et le **déterminant** **(produit en croix)** des coordonnées est **nul**, donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}}$ $(k \in \mathbb{R})$ et $\boldsymbol{xy' - x'y = 0}$.

- De manière générale, on peut dire que l'équation cartésienne d'une droite qui a pour vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est de la forme $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$.

Exercices

Exercice 1

Soient deux points $A(-3\,;3)$ et $B(-2\,;1)$. Donner une équation cartésienne de la droite (AB).

Exercice 2

Soient trois points $A(-1\,;0)$, $B(-1\,;1)$ et $C(-5\,;3)$.

1) Donner une équation cartésienne de la droite (d), passant par C et parallèle à (AB).

2) A quel axe cette droite est-elle parallèle ?

Exercice 3

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d').
Soient $A(-5\,;2) \in (d)$ et $B(-1\,;0) \in (d')$.

1) Les droites (d) et (d') sont-elles parallèles ?

2) Donner les coordonnées de I, l'intersection de (d) et (d').

Pour plus d'exercices accompagnés de leurs corrigés, n'hésitez pas à commander l'un des packs disponibles sur ce site, dans l'onglet Commander.

Corrigé

Exercice 1

Soient deux points $A(-3\,;3)$ et $B(-2\,;1)$. Donner une équation cartésienne de la droite (AB).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de notre droite (AB).

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-(-3) \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

$$avec\ a = -2\ et\ b = -1$$

Donc on obtient :

$$-2x - y + c = 0$$

Injectons les coordonnées de B dans notre équation :

$$-2 \times (-2) - 1 + c = 0$$

$$4 - 1 + c = 0$$

$$c = -3$$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est :

$$-2x - y - 3 = 0$$

Une autre équation plus agréable est :

$$2x + y + 3 = 0$$

Exercice 2

Soient trois points $A(-1\,;0)$, $B(-1\,;1)$ et $C(-5\,;3)$.

1) Donner une équation cartésienne de la droite (d), passant par C et parallèle à (AB).

Comme les droites (d) et (AB) sont parallèles, elles ont les mêmes vecteurs directeurs.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de notre droite (AB) et donc de la droite (d).

$$\overrightarrow{AB} = \binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{-1-(-1)}{1-0} = \binom{0}{1} = \binom{-b}{a}$$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

$$avec\ a = 1\ et\ b = 0$$

Donc on obtient :

$$x + c = 0$$

On sait que $C(-5\,;3) \in (d)$, on injecte donc les coordonnées de C dans notre équation.

$$-5 + c = 0$$

$$c = 5$$

Une équation cartésienne de la droite (d) est :

$$x + 5 = 0$$

2) A quel axe cette droite est-elle parallèle ?

$$x + 5 = 0 \iff x = -5$$

L'axe des ordonnées a aussi comme vecteur directeur $\binom{0}{1}$, donc cette droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

Exercice 3

Soient $\vec{u}\binom{2}{1}$ est un vecteur directeur de (d) et $\vec{v}\binom{2}{-4}$ est un vecteur directeur de (d').
Soient $A(-5\,;2) \in (d)$ et $B(-1\,;0) \in (d')$.

1) Les droites (d) et (d') sont-elles parallèles ?

1ère méthode :

x	2	2
y	1	-4

$$2 \times 1 = 2$$
$$1 \times 1 = 1 \neq -4$$

Donc il n'y a pas de coefficient de proportionnalité pour passer des coordonnées de $\vec{u}$ à celles de $\vec{v}$, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles.

2ème méthode :

$$\det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 2 \times (-4) - 1 \times 2 = -10$$

Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles.

2) Donner les coordonnées de I, l'intersection de (d) et (d').

Équation cartésienne de (d) :

L'équation est de la forme :
$$x - 2y + c = 0$$

Cherchons c :
$$-5 - 2 \times 2 + c = 0$$
$$-5 - 4 + c = 0$$
$$c = 9$$

$$(d) : \ x - 2y + 9 = 0$$

Équation cartésienne de (d') :

L'équation est de la forme :

$$-4x - 2y + c = 0$$

Cherchons c :

$$-4 \times (-1) - 2 \times 0 + c = 0$$
$$4 + c = 0$$
$$c = -4$$

$$(d') : \ -4x - 2y - 4 = 0$$

Cherchons les coordonnées de I, intersection de (d) et de (d') :

Comme I est l'intersection de (d) et de (d'), il appartient aux deux droites.

Comme $I \in (d)$, ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de (d), donc :

$$x_I - 2y_I + 9 = 0$$

Comme $I \in (d')$, ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de (d'), donc :

$$-4x_I - 2y_I - 4 = 0$$

Finalement, on peut écrire l'équation suivante :

$$x_I - 2y_I + 9 = -4x_I - 2y_I - 4$$
$$x_I + 9 = -4x_I - 4$$
$$x_I + 4x_I = -4 - 9$$
$$5x_I = -13$$
$$x_I = -\frac{13}{5}$$

En injectant x_I dans l'équation de (d) on obtient :

$$-\frac{13}{5} - 2y_I + 9 = 0$$
$$-2y_I + \frac{32}{5} = 0$$
$$y_I = -\frac{32}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{16}{5}$$

Donc $I\left(-\frac{13}{5}; \frac{16}{5}\right)$.

Pour plus d'exercices accompagnés de leurs corrigés, n'hésitez pas à commander l'un des packs disponibles sur ce site, dans l'onglet Commander*.*