



INÉQUATIONS QUOTIENTS

Rappels

Un produit est nul, si et seulement si, l'un, au moins, des facteurs est nul.

Autrement dit,

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Un quotient est nul si son numérateur est nul. Son **dénominateur**, quant à lui, ne doit **JAMAIS être nul**.

C'est-à-dire :

$$\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b \neq 0$$

Les valeurs qui annulent le dénominateur sont appelées **valeurs interdites**.

Exemple d'une équation :

$$\frac{3x + 7}{4 - 3x} = 0$$

- ❖ Le **dénominateur** doit toujours être différent de 0. Donc $4 - 3x \neq 0$. Or,

$$\begin{aligned} 4 - 3x &\neq 0 \\ -3x &\neq -4 \\ 3x &\neq 4 \\ x &\neq \frac{4}{3} \end{aligned}$$

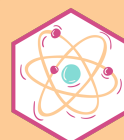
$\frac{4}{3}$ est appelé la **valeur interdite**.

- ❖ Nous savons qu'une fraction $\frac{a}{b} = 0$, si et seulement si, $a = 0$ et $b \neq 0$.

Donc nous avons :

$$\begin{aligned} 3x + 7 &= 0 \\ 3x &= -7 \\ x &= -\frac{7}{3} \\ \text{Or } -\frac{7}{3} &\neq \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } S = \left\{ -\frac{7}{3} \right\}$$





Exemple d'une inéquation :

$$\frac{(2x + 2)(-x - 3)}{x + 1} > 0$$

- ❖ Le **dénominateur** doit toujours être différent de 0. Donc $x + 1 \neq 0$. Or,

$$x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

-1 est appelé la **valeur interdite**.

- ❖ Cherchons les solutions qui annulent chacun des facteurs.

1^{er} facteur : On résout $2x + 2 = 0$.

$$2x + 2 = 0$$

$$2x = -2$$

$$x = -\frac{2}{2}$$

$$x = -1$$

Comme -1 est la valeur interdite, alors nous ne pouvons pas la prendre comme solution.

2^{ème} facteur : On résout $-x - 3 = 0$.

$$-x - 3 = 0$$

$$-x = 3$$

$$x = -3$$

- ❖ Récapitulons ces résultats grâce à un tableau de signe.

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
$2x + 2$	-		-	+
$-x - 3$	+	○	-	-
$x + 1$	-		-	+
$\frac{(2x + 2)(-x - 3)}{x + 1}$	+	○	-	-

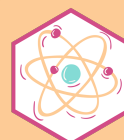
$$S =]-\infty; -3[$$

“

Aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce support sans l'autorisation expresse de l'auteur.

© 2022 Poppy & Sciences : Mélanie Demars

”





Exercices

EXERCICE 1

Résoudre les inéquations suivantes.

$$\frac{5x + 3}{2 - x} \leq 0$$

$$\frac{3x + 1}{4 + x} > 0$$

EXERCICE 2

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\frac{-5x}{1 + x} + \frac{5x + 2}{x} \leq 0$$

$$\frac{(5x + 3)(3x + 1)(x + 2)}{3x + 4} > 0$$

$$\frac{5}{2 - x} \geq \frac{3}{x + 3}$$

$$\frac{5x + \frac{1}{2}}{1 - x} + \frac{x - 2}{4} < 0$$

Pour plus d'exercices, n'hésitez pas à visiter mon site.

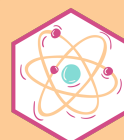
poppy-sciences.com

“

Aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce support sans l'autorisation expresse de l'auteur.

© 2022 Poppy & Sciences : Mélanie Demars

”





Corrigés

EXERCICE 1

Résoudre les inéquations suivantes.

$$\frac{5x + 3}{2 - x} \leq 0$$

$$\frac{3x + 1}{4 + x} > 0$$

1^{ère} inéquation :

$$\frac{5x + 3}{2 - x} \leq 0$$

❖ Cherchons la valeur interdite.

$$2 - x \neq 0 \text{ donc } x \neq 2$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

❖ Cherchons la valeur qui annule le numérateur.

$$5x + 3 = 0$$

$$5x = -3$$

$$x = -\frac{3}{5}$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	2	$+\infty$
5x + 3	-	○	+	+
2 - x	+	+	+	-
$\frac{5x + 3}{2 - x}$	-	○	+	-

$$S = \left] -\infty ; -\frac{3}{5} \right] \cup]2 ; +\infty [$$

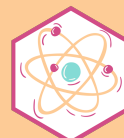
2^{ème} inéquation :

$$\frac{3x + 1}{4 + x} > 0$$

❖ Cherchons la valeur interdite.

$$4 + x \neq 0 \text{ donc } x \neq -4$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$$





❖ Cherchons la valeur qui annule le numérateur.

$$3x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	-4	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x + 1$	-		-	+
$4 + x$	-		+	+
$\frac{3x + 1}{4 + x}$	+		-	+

$$S =]-\infty ; 4[\cup]-\frac{1}{3} ; +\infty[$$

EXERCICE 2

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\frac{-5x}{1+x} + \frac{5x+2}{x} \leq 0$$

$$\frac{(5x+3)(3x+1)(x+2)}{3x+4} > 0$$

$$\frac{5}{2-x} \geq \frac{3}{x+3}$$

$$\frac{5x + \frac{1}{2}}{1-x} + \frac{x-2}{4} < 0$$

1^{ère} inéquation :

$$\frac{-5x}{1+x} + \frac{5x+2}{x} \leq 0$$

❖ Le **dénominateur** doit toujours être différent de 0. Donc $1 + x \neq 0$ et $x \neq 0$.

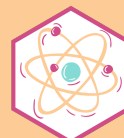
Donc :

$$x \neq -1 \text{ et } x \neq 0$$

-1 et 0 sont appelées les **valeurs interdites**.

❖ Transformons notre membre de gauche de manière à avoir une forme factorisée.

$$\begin{aligned} \frac{-5x}{1+x} + \frac{5x+2}{x} &= \frac{-5x \times x + (5x+2)(1+x)}{(1+x)x} = \frac{-5x \times x + 5x \times 1 + 5x \times x + 2 \times 1 + 2 \times x}{(1+x)x} \\ &= \frac{-5x^2 + 5x + 5x^2 + 2 + 2x}{(1+x)x} = \frac{7x + 2}{(1+x)x} \end{aligned}$$





- ❖ Cherchons les solutions qui annulent nos facteurs.

$$7x + 2 = 0 \text{ donc } x = -\frac{2}{7}$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{2}{7}$	0	$+\infty$
$7x + 2$	-		- ○ +	+	+
$1 + x$	-		+	+	+
x	-		-	-	+
$\frac{7x + 2}{(1 + x)x}$	-		+ ○ -	-	+

$$S =]-\infty; -1[\cup \left[-\frac{2}{7}; 0\right[$$

2^{ème} inéquation :

$$\frac{(5x + 3)(3x + 1)(x + 2)}{3x + 4} > 0$$

- ❖ Cherchons les valeurs interdites.

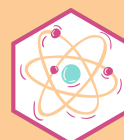
$$3x + 4 \neq 0 \text{ donc } x \neq -\frac{4}{3}$$

$$\text{Donc } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{4}{3}\right\}.$$

- ❖ Cherchons les valeurs qui annulent le numérateur.

$$\begin{array}{l} 5x + 3 = 0 \\ 5x = -3 \\ x = -\frac{3}{5} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} 3x + 1 = 0 \\ 3x = -1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ x = -2 \end{array}$$

- ❖ Dressons notre tableau de signe.





x	$-\infty$	-2	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$5x + 3$	-	-	-	○	+	+
$3x + 1$	-	-	-	-	○	+
$x + 2$	-	○	+	+	+	+
$3x + 4$	-	-	+	+	+	+
$\frac{(5x + 3)(3x + 1)(x + 2)}{3x + 4}$	+	○	-	+	○	+

$$S =]-\infty; -2[\cup]-\frac{4}{3}; -\frac{3}{5}[\cup]-\frac{1}{3}; +\infty[$$

3^{ème} inéquation :

$$\frac{5}{2-x} \geq \frac{3}{x+3}$$

❖ Cherchons les valeurs interdites.

$$\begin{matrix} 2-x \neq 0 & x+3 \neq 0 \\ x \neq 2 & \text{ou} & x \neq -3 \end{matrix}$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$$

❖ Reformulons notre équation.

$$\frac{5}{2-x} \geq \frac{3}{x+3}$$

$$\frac{5}{2-x} - \frac{3}{x+3} \geq 0$$

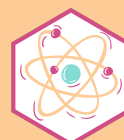
$$\frac{5(x+3) - 3(2-x)}{(2-x)(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{5x + 15 - 6 + 3x}{(2-x)(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{8x + 9}{(2-x)(x+3)} \geq 0$$

❖ Cherchons les valeurs qui annulent le numérateur :

$$8x + 9 = 0 \text{ donc } x = -\frac{9}{8}$$





❖ Dressons notre tableau de signe :

x	$-\infty$	-3	$-\frac{9}{8}$	2	$+\infty$
$8x + 9$	-	-	○	+	+
$2 - x$	+	+		+	-
$x + 3$	-	+		+	+
$\frac{8x + 9}{(2 - x)(x + 3)}$	+	-	○	+	-

$$S =]-\infty; -3[\cup \left[-\frac{9}{8}; 2[$$

4^{ème} inéquation :

$$\frac{5x + \frac{1}{2}}{1 - x} + \frac{x - 2}{4} < 0$$

❖ Cherchons le/les valeur(s) interdite(s) (les valeurs qui annulent le dénominateur).

$$1 - x \neq 0 \text{ donc } x \neq 1 ; x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

❖ Réécrivons notre équation de manière à l'avoir sous forme factorisée.

$$\frac{5x + \frac{1}{2}}{1 - x} + \frac{x - 2}{4} < 0$$

$$\frac{\left(5x + \frac{1}{2}\right) \times 4}{(1 - x) \times 4} + \frac{(x - 2) \times (1 - x)}{4(1 - x)} < 0$$

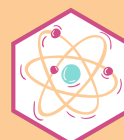
$$\frac{20x + 2 + x - x^2 - 2 + 2x}{4(1 - x)} < 0$$

$$\frac{23x - x^2}{4(1 - x)} < 0$$

$$\frac{x(-x + 23)}{4(1 - x)} < 0$$

❖ Cherchons les valeurs qui annulent le numérateur.

$$-x + 23 = 0 \text{ donc } x = 23 \text{ ou alors } x = 0$$





❖ Dressons notre tableau de signe :

x	$-\infty$	0	1	23	$+\infty$	
x	-	○	+	+	+	
$-x + 23$	+	+	+	○	-	
4	+	+	+	+	+	
$1 - x$	+	+	+	-	-	
$\frac{x(-x + 22)}{4(1 - x)}$	-	○	+	-	○	+

$S =]-\infty; 0[\cup]1; 22[$

Pour plus d'exercices, n'hésitez pas à visiter mon site.

poppy-sciences.com

“

Aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce support sans l'autorisation expresse de l'auteur.

”

© 2022 Poppy & Sciences : Mélanie Demars

