Inéquations Quotients

Rappels

Un produit est nul, si et seulement si, l'un, au moins, des facteurs est nul.
Autrement dit,

$$\boldsymbol{ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \; ou \; b = 0}$$

Un quotient est nul si son numérateur est nul. Son **dénominateur**, quant à lui, ne doit **JAMAIS être nul**.
C'est-à-dire :

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \; et \; b \neq 0}$$

Les valeurs qui annulent le dénominateur sont appelées **valeurs interdites**.

Exemple d'une équation :

$$\frac{3x+7}{4-3x} = 0$$

- Le **dénominateur** doit toujours être différent de 0. Donc $\boldsymbol{4 - 3x \neq 0}$. Or,

$$4 - 3x \neq 0$$
$$-3x \neq -4$$
$$3x \neq 4$$
$$x \neq \frac{4}{3}$$

$\frac{4}{3}$ est appelé la valeur interdite.

- Nous savons qu'une fraction $\frac{a}{b} = 0$, si et seulement si, $a = 0 \; et \; b \neq 0$.

  Donc nous avons :

$$3x + 7 = 0$$
$$3x = -7$$
$$x = -\frac{7}{3}$$
$$Or \; -\frac{7}{3} \neq \frac{4}{3}$$

$$Donc \; S = \left\{-\frac{7}{3}\right\}$$

Exemple d'une inéquation :

$$\frac{(2x+2)(-x-3)}{x+1} > 0$$

- Le **dénominateur** doit toujours être différent de 0. Donc $x+1 \neq 0$. Or,

$$x+1 \neq 0$$
$$x \neq -1$$

-1 est appelé la valeur interdite.

- Cherchons les solutions qui annulent chacun des facteurs.

1er facteur : On résout $2x+2=0$.

$$2x+2=0$$
$$2x=-2$$
$$x=-\frac{2}{2}$$
$$x=-1$$

Comme -1 est la valeur interdite, alors nous ne pouvons pas la prendre comme solution.

2ème facteur : On résout $-x-3=0$.

$$-x-3=0$$
$$-x=3$$
$$x=-3$$

- Récapitulons ces résultats grâce à un tableau de signe.

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$2x+2$		$-$	|	$-$	||	$+$	
$-x-3$		$+$	0	$-$	||	$-$	
$x+1$		$-$	|	$-$	||	$+$	
$\frac{(2x+2)(-x-3)}{x+1}$		$+$	0	$-$	||	$-$	

$$S =]-\infty\,;-3[$$

Exercices

Exercice 1

Résoudre les inéquations suivantes.

$$\frac{5x+3}{2-x} \leq 0 \qquad \frac{3x+1}{4+x} > 0$$

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\frac{-5x}{1+x} + \frac{5x+2}{x} \leq 0 \qquad \frac{(5x+3)(3x+1)(x+2)}{3x+4} > 0$$

$$\frac{5}{2-x} \geq \frac{3}{x+3} \qquad \frac{5x+\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{x-2}{4} < 0$$

Pour plus d'exercices, n'hésitez pas à visiter mon site.
poppy-sciences.com

Corrigés

Exercice 1

Résoudre les inéquations suivantes.

$$\frac{5x+3}{2-x} \leq 0 \qquad\qquad \frac{3x+1}{4+x} > 0$$

1ère inéquation :

$$\frac{\mathbf{5x+3}}{\mathbf{2-x}} \leq \mathbf{0}$$

- Cherchons la valeur interdite.

$$2-x \neq 0 \; donc \; x \neq 2$$
$$x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

- Cherchons la valeur qui annule le numérateur.

$$5x+3=0$$
$$5x=-3$$
$$x=-\frac{3}{5}$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		2		$+\infty$
$5x+3$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	||	$-$	
$\frac{5x+3}{2-x}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

$$S = \left]-\infty\,;-\frac{3}{5}\right] \cup \left]2\,;+\infty\right[$$

2ème inéquation :

$$\frac{\mathbf{3x+1}}{\mathbf{4+x}} > \mathbf{0}$$

- Cherchons la valeur interdite.

$$4+x \neq 0 \; donc \; x \neq -4$$
$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$$

- Cherchons la valeur qui annule le numérateur.

$$3x + 1 = 0$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$		-4		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x+1$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$4+x$		$-$	||	$+$	|	$+$	
$\frac{3x+1}{4+x}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

$$S = \left]-\infty\,; 4\right[\cup \left]-\frac{1}{3}\,; +\infty\right[$$

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\frac{-5x}{1+x} + \frac{5x+2}{x} \leq 0 \qquad \frac{(5x+3)(3x+1)(x+2)}{3x+4} > 0$$

$$\frac{5}{2-x} \geq \frac{3}{x+3} \qquad \frac{5x + \frac{1}{2}}{1-x} + \frac{x-2}{4} < 0$$

1ère inéquation :

$$\frac{-5x}{1+x} + \frac{5x+2}{x} \leq 0$$

- Le **dénominateur** doit toujours être différent de 0. Donc $\mathbf{1 + x \neq 0}$ et $\mathbf{x \neq 0}$.
  Donc :

$$x \neq -1 \text{ et } x \neq 0$$

-1 et 0 sont appelées les valeurs interdites.

- Transformons notre membre de gauche de manière à avoir une forme factorisée.

$$\frac{-5x}{1+x} + \frac{5x+2}{x} = \frac{-5x \times x + (5x+2)(1+x)}{(1+x)x} = \frac{-5x \times x + 5x \times 1 + 5x \times x + 2 \times 1 + 2 \times x}{(1+x)x}$$

$$= \frac{-5x^2 + 5x + 5x^2 + 2 + 2x}{(1+x)x} = \frac{7x+2}{(1+x)x}$$

- Cherchons les solutions qui annulent nos facteurs.

$$7x+2=0 \; donc \; x=-\frac{2}{7}$$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{2}{7}$		0	$+\infty$
$7x+2$	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
$1+x$	$-$	‖	$+$		$+$	‖	$+$
x	$-$	‖	$-$		$-$	‖	$+$
$\frac{7x+2}{(1+x)x}$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$

$$S=]-\infty\,;-1[\,\cup\left[-\frac{2}{7}\,;0\right[$$

2ème inéquation :

$$\frac{(5x+3)(3x+1)(x+2)}{3x+4}>0$$

- Cherchons les valeurs interdites.

$$3x+4\neq 0 \; donc \; x\neq -\frac{4}{3}$$

Donc $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

- Cherchons les valeurs qui annulent le numérateur.

$$\begin{gathered}5x+3=0\\ 5x=-3\\ x=-\frac{3}{5}\end{gathered} \quad ou \quad \begin{gathered}3x+1=0\\ 3x=-1\\ x=-\frac{1}{3}\end{gathered} \quad ou \quad \begin{gathered}x+2=0\\ x=-2\end{gathered}$$

- Dressons notre tableau de signe.

x	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{3}$		$-\frac{3}{5}$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$5x+3$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$3x+1$		$-$		$-$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$		$+$	
$3x+4$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$		$+$	
$\frac{(5x+3)(3x+1)(x+2)}{3x+4}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S =]-\infty\,;-2[\cup \left]-\frac{4}{3};-\frac{3}{5}\right[\cup \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$$

3ème inéquation :

$$\frac{5}{2-x} \geq \frac{3}{x+3}$$

- Cherchons les valeurs interdites.

$$\begin{array}{ccc} 2-x \neq 0 & & x+3 \neq 0 \\ & ou & \\ x \neq 2 & & x \neq -3 \end{array}$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\,;2\}$$

- Reformulons notre équation.

$$\frac{5}{2-x} \geq \frac{3}{x+3}$$

$$\frac{5}{2-x} - \frac{3}{x+3} \geq 0$$

$$\frac{5(x+3)-3(2-x)}{(2-x)(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{5x+15-6+3x}{(2-x)(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{8x+9}{(2-x)(x+3)} \geq 0$$

- Cherchons les valeurs qui annulent le numérateur :

$$8x+9=0 \; donc \; x = -\frac{9}{8}$$

- Dressons notre tableau de signe :

x	$-\infty$	-3		$-\frac{9}{8}$		2		$+\infty$
$8x+9$	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$2-x$	$+$	‖	$+$		$+$	‖	$-$	
$x+3$	$-$	‖	$+$		$+$	‖	$+$	
$\frac{8x+9}{(2-x)(x+3)}$	$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

$$S =]-\infty\,;-3[\cup\left[-\frac{9}{8}\,;2\right[$$

4ème inéquation :

$$\frac{5x+\frac{1}{2}}{1-x}+\frac{x-2}{4}<0$$

- Cherchons le/les valeur(s) interdite(s) (les valeurs qui annulent le dénominateur).

$$1-x\neq 0 \text{ donc } x\neq 1\,;x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

- Réécrivons notre équation de manière à l'avoir sous forme factorisée.

$$\frac{5x+\frac{1}{2}}{1-x}+\frac{x-2}{4}<0$$

$$\frac{\left(5x+\frac{1}{2}\right)\times 4}{(1-x)\times 4}+\frac{(x-2)\times(1-x)}{4(1-x)}<0$$

$$\frac{20x+2+x-x^2-2+2x}{4(1-x)}<0$$

$$\frac{23x-x^2}{4(1-x)}<0$$

$$\frac{x(-x+23)}{4(1-x)}<0$$

- Cherchons les valeurs qui annulent le numérateur.

$$-x+23=0 \text{ donc } x=23 \text{ ou alors } x=0$$

- Dressons notre tableau de signe :

x	$-\infty$		0		1		23		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
$-x+23$		$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
4		$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
$1-x$		$+$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	
$\frac{x(-x+22)}{4(1-x)}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$$S =]-\infty; 0[\cup]1; 22[$$

Pour plus d'exercices, n'hésitez pas à visiter mon site.

poppy-sciences.com