



LES PROBABILITÉS

Révisions

❖ Vocabulaire

Prenons pour exemple l'expérience suivante :

On lance un dé (non pipé) à 6 faces, et on regarde le résultat obtenu.

Une expérience aléatoire est une expérience dont nous connaissons les résultats (**issues**) possibles mais dont nous ne pouvons pas prévoir le résultat qui se produira.

→ *Dans notre exemple, les 6 issues possibles sont $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$, mais nous ne savons pas sur quelle face nous allons tomber.*

L'ensemble de toutes les issues possibles forment **l'univers** que l'on note Ω .

Un évènement est une condition qui peut être réalisée par une ou plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.

❖ **Un évènement élémentaire** est réalisé par **une seule issue**.

→ *Dans notre exemple, l'évènement « obtenir un nombre paire » est composé de 3 issues : $\{2 ; 4 ; 6\}$. Ce n'est donc pas un évènement élémentaire.*

→ *Dans notre exemple, l'évènement « obtenir un multiple de 5 » est composé d'une seule issue : $\{5\}$. C'est donc un évènement élémentaire.*

❖ **Un évènement certain** est un évènement réalisé par toutes les issues.

→ *Dans notre exemple, l'évènement « obtenir un nombre entre 0 et 10 » est composé de toutes les issues possibles : $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$. C'est donc un évènement certain.*

❖ **Un évènement impossible** est un évènement réalisé par aucune des issues.

→ *Dans notre exemple, l'évènement « obtenir un nombre négatif » ne peut être réalisé par aucune issue. C'est donc un évènement impossible.*

L'évènement contraire de l'évènement A , noté \bar{A} , est l'ensemble de toutes les issues d'une même expérience aléatoire n'appartenant pas à A .

→ *Dans notre exemple, les évènements A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un nombre impair » sont contraires. En effet : $A = \{2 ; 4 ; 6\}$ et $B = \{1 ; 3 ; 5\}$. On note alors $B = \bar{A}$.*





Deux événements incompatibles sont deux évènements qui ne peuvent pas se produire en même temps.

→ Dans notre exemple, les évènements A : « le nombre obtenu est 4 » et B : « le nombre obtenu est un nombre premier » sont incompatibles. En effet : $A = \{4\}$ et $B = \{1; 2; 3; 5\}$.

L'intersection de deux événements A et B est l'ensemble des issues qui sont à la fois dans A **ET** dans B . On note $A \cap B$.

L'union de deux événements A et B est l'ensemble des issues qui sont, **OU** dans A , **OU** dans B , **OU** dans les deux. Ce « ou » est dit non-exclusif. On note $A \cup B$.

Deux événements indépendants sont deux évènements qui ne dépendent pas l'un de l'autre. Deux évènements A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

→ Dans notre exemple, nous lançons le dé deux fois de suite. Soient les évènements A : « j'obtiens un nombre pair au premier lancé » et B : « j'obtiens un multiple de 3 au deuxième lancé ».

Ces deux évènements ne dépendent pas l'un de l'autre, ils sont indépendants.

$$\text{On a } P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

❖ Calcul de Probabilité

La **probabilité** d'un évènement A est un nombre compris entre 0 et 1 qui exprime « la chance » qu'a l'évènement A de se produire ». On note cette probabilité $p(A)$ et elle se calcule comme suit :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables à } A}{\text{Nombre d'issues total}}$$

- ❖ Un évènement dont la probabilité est **égale à 0** est un **évènement impossible**.
- ❖ Un évènement dont la probabilité est **égale à 1** est un **évènement certain**.
- ❖ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Exemple :

1) Quelle est la probabilité de l'évènement A : « obtenir un nombre pair » ?

$$A : \{2; 4; 6\} \text{ et } \Omega = \{1; 3; 4; 5; 6\}$$

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables à } A}{\text{Nombre d'issues total}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

La probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{1}{2}$.





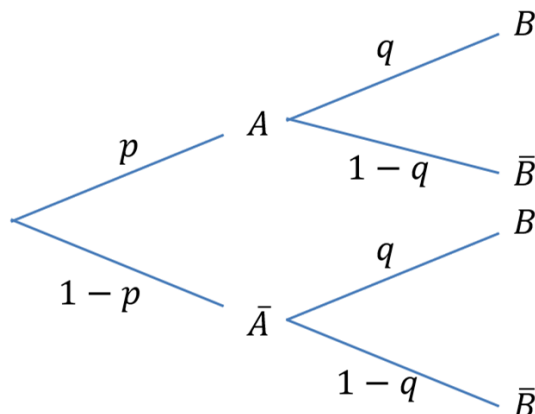
❖ Arbre Pondéré ou Arbres de Probabilité

Pour visualiser l'expérience et la probabilité de chaque issue, il est fortement conseillé de réaliser un arbre pondéré.

Prenons par exemple deux évènements A et B indépendants.

On note p la probabilité de l'évènement A et q la probabilité de l'évènement B .

L'arbre pondéré de cette situation est le suivant :



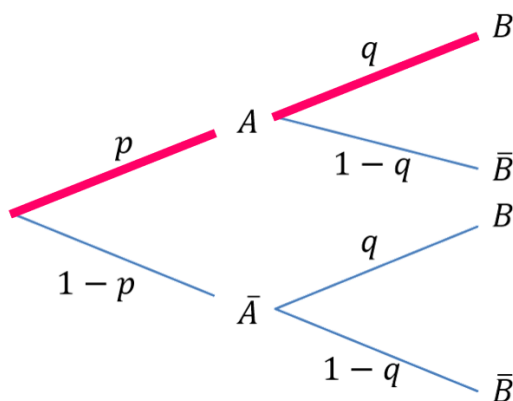
Le point de départ des branches s'appelle un nœud. Par exemple, le point d'où partent la branche qui va à A et la branche qui va à \bar{A} est un nœud.

Cet arbre nous aide à trouver des probabilités.

Exemples :

➔ Quel est la probabilité d'obtenir l'évènement A **ET** l'évènement B ?

Voilà le chemin que j'entreprends :



Cette probabilité s'écrit $P(A \cap B)$.

Pour la calculer, je multiplie la probabilité d'obtenir l'évènement A et celle d'obtenir l'évènement B sachant A . De manière générale, lorsque l'on passe par un nœud, on utilise l'opérateur \times .

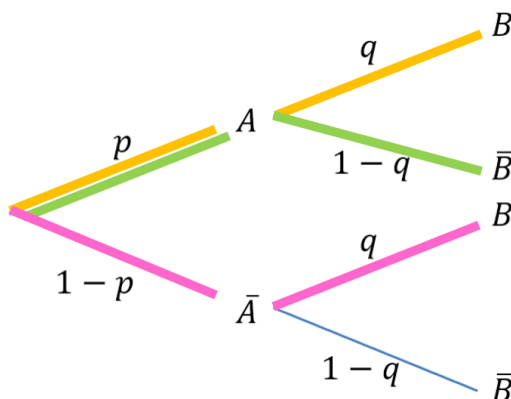
On a donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = q \times p = qp$





→ Quel est la probabilité d'obtenir l'évènement **B OU A** ?

Voilà les différents chemins que je peux entreprendre :



Cette probabilité s'écrit $P(A \cup B)$.

Pour la calculer, j'ajoute les probabilités de tous les chemins possibles. De manière générale, lorsque l'on a plusieurs chemins possibles, on utilise l'opérateur +.

On a donc :

$$P(A \cup B) = P(A) \times P_A(B) + P(A) \times P_A(\bar{B}) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

$$P(A \cup B) = pq + p(1 - q) + (1 - p)q$$

Remarque :

- La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de B sachant A (c'est-à-dire dans la situation où A est réalisé), s'écrit $P_A(B)$. On retrouve cette probabilité sur la branche qui lie A à B.

❖ Formules

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

“
Aucune reproduction,
même partielle, autres que celles
prévues à l'article L 122-5 du code de la
propriété intellectuelle, ne peut être
faite de ce support sans l'autorisation
expresse de l'autrice.
”





Exercices

EXERCICE 1

Andy veut créer un jeu de ticket à gratter.

Un ticket coûterait 10€. Dans un échantillon de 4000 tickets, il y aurait :

- ❖ 10 tickets gagnant 5€
- ❖ 10 tickets gagnant 10€
- ❖ 4 tickets gagnant 30€
- ❖ 1 tickets gagnant 20 000€
- ❖ Le reste des tickets est perdant.

- 1) Quelle est la probabilité de gratter un ticket à 20 000 € ?
- 2) Quelle est la probabilité d'avoir un ticket gagnant ?

EXERCICE 2

Une urne contient 40 boules numérotées de 1 à 40. Les boules numérotées de 1 à 10 sont rouges, et celles numérotés de 11 à 40 sont vertes. On tire une boule au hasard.

On note les évènements suivants :

- ❖ A : « Le numéro sorti est un multiple de 5. »
- ❖ B : « Le numéro sorti est un nombre pair. »
- ❖ R : « La boule est rouge. »
- ❖ V : « La boule est verte. »

- 1) Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(R)$ et $P(V)$.
- 2) Calculer $P(A \cup B)$.

Pour plus d'exercices accompagnés de leurs corrigés, n'hésitez pas à commander l'un des packs disponibles sur ce site, dans l'onglet [Commander](#).

“

Aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce support sans l'autorisation expresse de l'autrice.

”





Corrigés

EXERCICE 1

Andy veut créer un jeu de ticket à gratter.

Un ticket coûterait 10€. Dans un échantillon de 4000 tickets, il y aurait :

- ❖ 10 tickets gagnant 5€
- ❖ 10 tickets gagnant 10€
- ❖ 4 tickets gagnant 30€
- ❖ 1 tickets gagnant 20 000€
- ❖ Le reste des tickets est perdant.

- 1) Quelle est la probabilité de gratter un ticket à 20 000 € ?

Soit V l'évènement « obtenir un ticket à 20 000 € ».

$$P(V) = \frac{1}{4000} = 0,00025$$

- 2) Quelle est la probabilité d'avoir un ticket gagnant ?

Soit G l'évènement « obtenir un ticket gagnant ».

$$P(G) = \frac{25}{4000} = 0,00625$$

EXERCICE 2

Une urne contient 40 boules numérotées de 1 à 40. Les boules numérotées de 1 à 10 sont rouges, et celles numérotés de 11 à 40 sont vertes. On tire une boule au hasard.

On note les évènements suivants :

- ❖ A : « Le numéro sorti est un multiple de 5. »
- ❖ B : « Le numéro sorti est un nombre pair. »
- ❖ R : « La boule est rouge. »
- ❖ V : « La boule est verte. »

- 1) Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(R)$ et $P(V)$.

$$A = \{5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40\}$$

$$P(A) = \frac{8}{40} = 0,2$$





$$B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38\}$$

$$P(B) = \frac{20}{40} = 0,5$$

$$P(R) = \frac{10}{40} = 0,25$$

$$P(V) = \frac{30}{40} = 0,75$$

2) Calculer $P(A \cup B)$.

$$A \cap B = \{10; 20; 30; 40\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{40} = 0,1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,2 + 0,5 - 0,1 = 0,6$$

Pour plus d'exercices accompagnés de leurs corrigés, n'hésitez pas à commander l'un des packs disponibles sur ce site, dans l'onglet [Commander](#).

“

Aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce support sans l'autorisation expresse de l'autrice.

”

