Les Probabilités

Révisions

Vocabulaire

Prenons pour exemple l'expérience suivante :
On lance un dé (non pipé) à 6 faces, et on regarde le résultat obtenu.

Une expérience aléatoire est une expérience dont nous connaissons les résultats (**issues**) possibles mais dont nous ne pouvons pas prévoir le résultat qui se produira.

→ *Dans notre exemple, les 6 issues possibles sont* $\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$*, mais nous ne savons pas sur quelle face nous allons tomber.*

L'ensemble de toutes les issues possibles forment **l'univers** que l'on note $\boldsymbol{\Omega}$.

Un évènement est une condition qui peut être réalisée par une ou plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.

- **Un évènement élémentaire** est réalisé par **une seule issue**.
  → *Dans notre exemple, l'évènement « obtenir un nombre paire » est composé de 3 issues :* $\{2\,;4\,;6\}$*. Ce n'est donc pas un évènement élémentaire.*
  → *Dans notre exemple, l'évènement « obtenir un multiple de 5 » est composé d'une seule issue :* $\{1\}$*. C'est donc un évènement élémentaire.*

- **Un évènement certain** est un évènement réalisé par toutes les issues.
  → *Dans notre exemple, l'évènement « obtenir un nombre entre 0 et 10 » est composé de toutes les issues possibles :* $\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$*. C'est donc un évènement certain.*

- **Un évènement impossible** est un évènement réalisé par aucune des issues.
  → *Dans notre exemple, l'évènement « obtenir un nombre négatif » ne peut être réalisé par aucune issue. C'est donc un évènement impossible.*

L'événement contraire de l'évènement A, noté $\bar{A}$, est l'ensemble de toutes les issues d'une même expérience aléatoire n'appartenant pas à A.

→ *Dans notre exemple, les évènements* A *: « obtenir un nombre pair » et* B *: « obtenir un nombre impair » sont contraires. En effet :* $A = \{2\,;4\,;6\}$ *et* $B = \{1\,;3\,;5\}$*. On note alors* $B = \bar{A}$*.*

Deux événements incompatibles sont deux évènements qui ne peuvent pas se produire en même temps.

→ *Dans notre exemple, les évènements A : « le nombre obtenu est 4 » et B : « le nombre obtenu est un nombre premier » sont incompatibles. En effet : $A = \{4\}$ et $B = \{1\,;2\,;3\,;5\}$.*

L'intersection de deux événements A et B est l'ensemble des issues qui sont à la fois dans A **ET** dans B. On note $\boldsymbol{A \cap B}$.

L'union de deux événements A et B est l'ensemble des issues qui sont, **OU** dans A, **OU** dans B, **OU** dans les deux. Ce « ou » est dit non-exclusif. On note $\boldsymbol{A \cup B}$.

Deux événements indépendants sont deux évènements qui ne dépendent pas l'un de l'autre. Deux évènements A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

→ *Dans notre exemple, nous lançons le dé deux fois de suite. Soient les évènements A : « j'obtiens un nombre pair au premier lancé » et B : « j'obtiens un multiple de 3 au deuxième lancé ».*
Ces deux évènements ne dépendent pas l'un de l'autre, ils sont indépendants.
On a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Calcul de Probabilité

La **probabilité** d'un évènement A est un nombre compris entre 0 et 1 qui exprime « la chance » qu'a l'évènement A de se produire ». On note cette probabilité $p(A)$ et elle se calcule comme suit :

$$P(A) = \frac{Nombre\ d'issues\ favorables\ \text{à}\ A}{Nombre\ d'issues\ total}$$

- Un évènement dont la probabilité est **égale à 0** est un **évènement impossible**.
- Un évènement dont la probabilité est **égale à 1** est un **évènement certain**.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Exemple :

1) Quelle est la probabilité de l'évènement A : « obtenir un nombre pair » ?

$$A : \{2\,;4\,;6\} \text{ et } \Omega = \{1\,;3\,;4\,;5\,;6\}$$

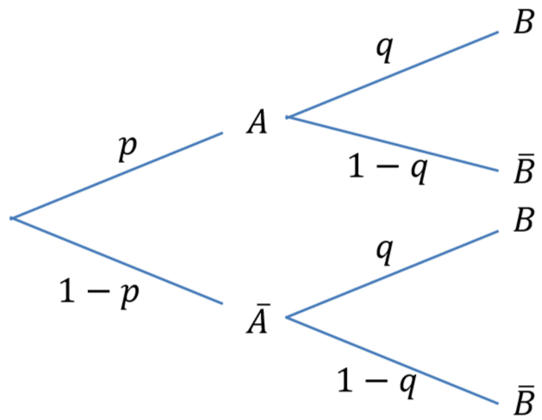
$$P(A) = \frac{Nombre\ d'issues\ favorables\ \text{à}\ A}{Nombre\ d'issues\ total} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

La probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{1}{2}$.

❖ Arbre Pondéré ou Arbres de Probabilité

Pour visualiser l'expérience et la probabilité de chaque issue, il est fortement conseillé de réaliser un arbre pondéré.

Prenons par exemple deux évènements A et B indépendants.
On note p la probabilité de l'évènement A et q la probabilité de l'évènement B.
L'arbre pondéré de cette situation est le suivant :



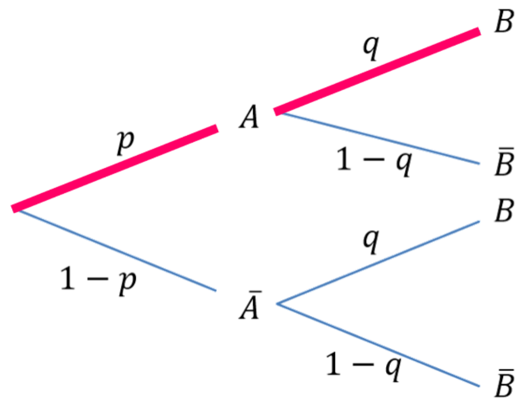
Le point de départ des branches s'appelle un nœud. Par exemple, le point d'où partent la branche qui va à A et la branche qui va à $\bar{A}$ est un nœud.

Cet arbre nous aide à trouver des probabilités.

Exemples :

→ Quel est la probabilité d'obtenir l'évènement $\boldsymbol{A}$ ***ET*** l'évènement $\boldsymbol{B}$?

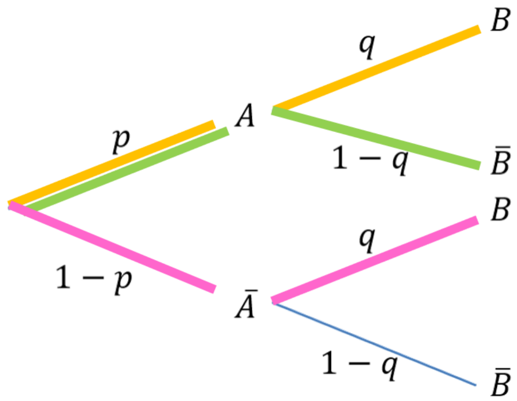
Voilà le chemin que j'entreprends :



Cette probabilité s'écrit $\boldsymbol{P(A \cap B)}$.
Pour la calculer, je multiplie la probabilité d'obtenir l'évènement A et celle d'obtenir l'évènement B sachant A. De manière générale, lorsque l'on passe par un nœud, on utilise l'opérateur $\times$.
On a donc : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = q \times p = qp$

→ Quel est la probabilité d'obtenir l'évènement ***B OU A*** ?

Voilà les différents chemins que je peux entreprendre :



Cette probabilité s'écrit $\boldsymbol{P(A \cup B)}$.
Pour la calculer, j'ajoute les probabilités de tous les chemins possibles. De manière générale, lorsque l'on a plusieurs chemins possibles, on utilise l'opérateur $+$.
On a donc :

$$P(A \cup B) = \boldsymbol{P(A) \times P_A(B)} \ + \ \boldsymbol{P(A) \times P_A(\bar{B})} \ + \ \boldsymbol{P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)}$$
$$P(A \cup B) = \boldsymbol{pq} \ + \ \boldsymbol{p(1-q)} \ + \boldsymbol{(1-q)q}$$

Remarque :

- La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de B sachant A (c'est-à-dire dans la situation où A est réalisé), s'écrit $P_A(B)$. On retrouve cette probabilité sur la branche qui lie A à B.

Formules

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)}$$
$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)}$$

$$\boldsymbol{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

Loi de Probabilité et Variable Aléatoire

On définit une **variable aléatoire** en associant un nombre réel à chaque éventualité d'une expérience aléatoire. La **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X associe à chaque valeur x_i prise par X la probabilité de l'événement $P(X = x_i)$. On la représente généralement sous forme de tableau.

Exercices

Exercice 1

Andy veut créer un jeu de ticket à gratter.

Un ticket coûterait 10€. Dans un échantillon de 4000 tickets, il y aurait :

- 10 tickets gagnant 5€
- 10 tickets gagnant 10€
- 4 tickets gagnant 30€
- 1 tickets gagnant 20 000€
- Le reste des tickets est perdant.

1) Quelle est la probabilité de gratter un ticket à 20 000 € ?
2) Quelle est la probabilité d'avoir un ticket gagnant ?
3) Donner la loi de probabilité des gains de ce jeu.
4) Calculer l'espérance des gains.
5) Ce jeu est-il équitable ? Andy pourra-t-il faire des bénéfices ?
6) Quel gain Andy devrait-il mettre à la place de 20 000€ pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 2

Une urne contient 40 boules numérotées de 1 à 40. Les boules numérotées de 1 à 10 sont rouges, et celles numérotés de 11 à 40 sont vertes. On tire une boule au hasard.

Partie A

On note les évènements suivants :

- A : « Le numéro sorti est un multiple de 5. »
- B : « Le numéro sorti est un nombre pair. »
- R : « La boule est rouge. »
- V : « La boule est verte. »

1) Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(R)$ et $P(V)$.
2) Sans calcul, mais avec justification du cours, donner $P(R \cap V)$.
3) Calculer $P(A \cup B)$.

Partie B

Andy veut créer un autre jeu. Il utilise cette même expérience. Le joueur paie 5€ pour jouer.

Voici les évènements gagnants :

- Si l'évènement $R \cap \bar{B} \cap \bar{A}$ se produit, le joueur gagne 5 €.
- Si l'évènement $R \cap B \cap \bar{A}$ se produit, le joueur gagne 10 €.
- Si l'évènement $R \cap B \cap A$ se produit, le joueur gagne 30 €.

Les autres évènements ne rapportent rien.

1) Quelle est la probabilité de tirer une boule à 30 € ?
2) Quelle est la probabilité de tirer une boule à 10 € ?
3) Quelle est la probabilité de tirer une boule à 5 € ?
4) Donner la loi de probabilité des gains de ce jeu.
5) Calculer l'espérance des gains.
6) Ce jeu est-il équitable ?
7) Si Andy fait jouer 400 personnes, quel bénéfice pourra-t-il espérer ?

Corrigés

Exercice 1

Andy veut créer un jeu de ticket à gratter.

Un ticket coûterait 10€. Dans un échantillon de 4000 tickets, il y aurait :

- 10 tickets gagnant 5€
- 10 tickets gagnant 10€
- 4 tickets gagnant 30€
- 1 tickets gagnant 20 000€
- Le reste des tickets est perdant.

1) Quelle est la probabilité de gratter un ticket à 20 000 € ?

Soit V l'évènement « obtenir un ticket à 20 000 € ».

$$P(V) = \frac{1}{4000} = 0{,}00025$$

2) Quelle est la probabilité d'avoir un ticket gagnant ?

Soit G l'évènement « obtenir un ticket gagnant ».

$$P(G) = \frac{25}{4000} = 0{,}00625$$

3) Donner la loi de probabilité des gains de ce jeu.

x_i	-10	-5	0	20	$19\,990$
$P(X = x_i)$	$\frac{3975}{4000}$	$\frac{10}{4000}$	$\frac{10}{4000}$	$\frac{4}{4000}$	$\frac{1}{4000}$

4) Calculer l'espérance des gains.

$$E(X) = \frac{-10 \times 3975 - 5 \times 10 + 0 \times 10 + 20 \times 4 + 19990 \times 1}{4000} = -4{,}93\text{ €}$$

5) Ce jeu est-il équitable ? Andy pourra-t-il faire des bénéfices ?

$E(X) \neq 0$, donc le jeu n'est pas équitable.
L'espérance est négative, donc Andy pourra faire des bénéfices.

6) Quel gain Andy devrait-il mettre à la place de 20 000€ pour que le jeu soit équitable ?

Soit x le gain du dernier ticket gagnant.

$$E(X) = \frac{-10 \times 3975 - 5 \times 10 + 0 \times 10 + 20 \times 4 + (x - 10) \times 1}{4000} = 0$$

$$-10 \times 3975 - 5 \times 10 + 0 \times 10 + 20 \times 4 + (x - 10) \times 1 = 0$$

$$-39720 + x - 10 = 0$$

$$x = 39730 \text{ €}$$

Donc Andy doit mettre le ticket gagnant à 39 730 € à la place de 20 000 € pour que le jeu soit équitable.

Exercice 2

Une urne contient 40 boules numérotées de 1 à 40. Les boules numérotées de 1 à 10 sont rouges, et celles numérotés de 11 à 40 sont vertes. On tire une boule au hasard.

Partie A

On note les évènements suivants :

- A : « Le numéro sorti est un multiple de 5. »
- B : « Le numéro sorti est un nombre pair. »
- R : « La boule est rouge. »
- V : « La boule est verte. »

1) Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(R)$ et $P(V)$.

$$A = \{5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40\}$$

$$P(A) = \frac{8}{40} = 0{,}2$$

$$B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38\}$$

$$P(B) = \frac{20}{40} = 0{,}5$$

$$P(R) = \frac{10}{40} = 0{,}25$$

$$P(V) = \frac{30}{40} = 0{,}75$$

2) Sans calcul, mais avec justification du cours, donner $P(R \cap V)$.

R et V sont deux évènements incompatibles (ils sont même des évènements contraires), donc :

$$P(R \cap V) = 0$$

3) Calculer $P(A \cup B)$.

$$A \cap B = \{10; 20; 30; 40\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{40} = 0{,}1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}2 + 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}6$$

Partie B

Andy veut créer un autre jeu. Il utilise cette même expérience. Le joueur paie 5€ pour jouer.

Voici les évènements gagnants :

- Si l'évènement $R \cap \bar{B} \cap \bar{A}$ se produit, le joueur gagne 5 €.
- Si l'évènement $R \cap B \cap \bar{A}$ se produit, le joueur gagne 10 €.
- Si l'évènement $R \cap B \cap A$ se produit, le joueur gagne 30 €.

Les autres évènements ne rapportent rien.

1) Quelle est la probabilité de tirer une boule à 30 € ?

$$R \cap B \cap A = \{10\}$$

$$P(R \cap B \cap A) = \frac{1}{40} = 0{,}025$$

2) Quelle est la probabilité de tirer une boule à 10 € ?

$$R \cap B \cap \bar{A} = \{2; 4; 6; 8\}$$

$$P(R \cap B \cap \bar{A}) = \frac{4}{40} = 0{,}1$$

3) Quelle est la probabilité de tirer une boule à 5 € ?

$$R \cap \bar{B} \cap \bar{A} = \{1; 3; 7; 9\}$$

$$P(R \cap \bar{B} \cap \bar{A}) = \frac{4}{40} = 0{,}1$$

4) Donner la loi de probabilité des gains de ce jeu.

x_i	-5	0	5	25
$P(X = x_i)$	$0,775$	$0,1$	$0,1$	$0,025$

5) Calculer l'espérance des gains.

$$E(X) = -5 \times 0{,}775 + 0 + 5 \times 0{,}1 + 25 \times 0{,}025 = -2{,}75 \text{ €}$$

6) Ce jeu est-il équitable ?

$E(X) \neq 0$ donc le jeu n'est pas équitable.

7) Si Andy fait jouer 400 personnes, quel bénéfice pourra-t-il espérer ?

$$400 \times 2{,}75 = 1100 \text{ €}$$

Il peut estimer ses bénéfices à 1100€.