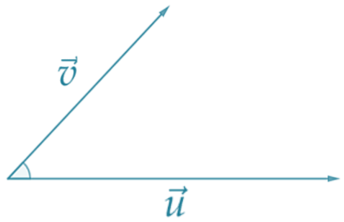
Vecteurs et Produits Scalaires

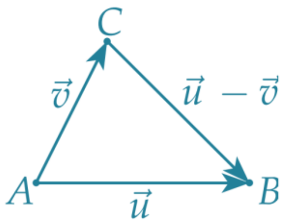
Rappels

❖ Formule avec les normes et un angle



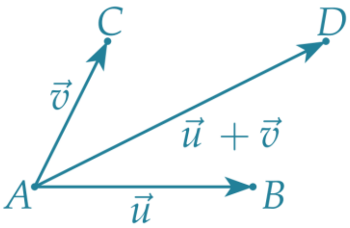
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\,;\vec{v})$$

❖ Formules avec les normes uniquement



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - CB^2\right)$$

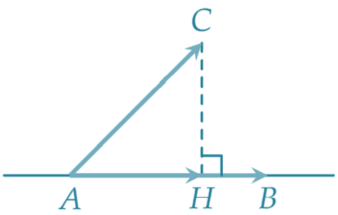


$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

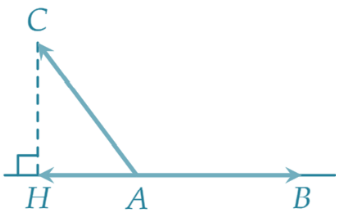
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AD^2 - AB^2 - AC^2\right)$$

Formules avec projeté orthogonal

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$$



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AH$$



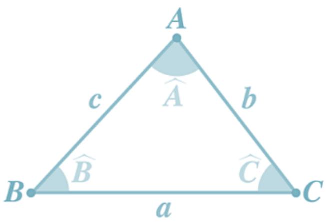
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$$

Formule avec les coordonnées

$$\vec{u}=\binom{x}{y}\ et\ \vec{v}=\binom{x'}{y'}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$$

Formules d'Al-Kashi



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos(\widehat{A})$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos(\widehat{B})$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos(\widehat{C})$$

Vecteurs Orthogonaux

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, si, et seulement si, leur **produit scalaire est nul**.

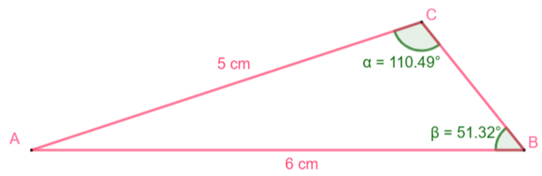
$$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

Exercices

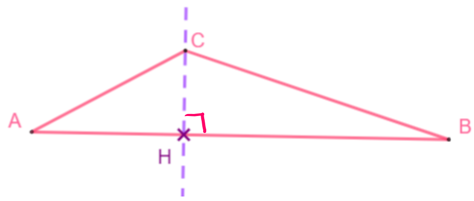
Exercice 1

Dans chacun des cas, donner le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (arrondir au centième).

Cas 1 :



Cas 2 :



On donne $AH = \frac{1}{3}AB$ et $AB = 6cm$.

Exercice 2 :

Soit un parallélogramme $ABCD$, tel que $AB = 6\ cm$, $AD = 5\ cm$ et $\widehat{DAB} = 110°$.

Calculer les produits scalaires suivants (arrondir au dixième) :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$$

Exercice 3 :

Soient les points $E(-2\ ;\ 4)$, $F(2\ ;\ 8)$, $G(4\ ;6)$ et $H(0\ ;2)$.

1) Représenter ces points dans un repère orthonormé.
2) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{HG}$.
3) Calculer $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG}$.
4) Justifier que $EFGH$ soit un rectangle.

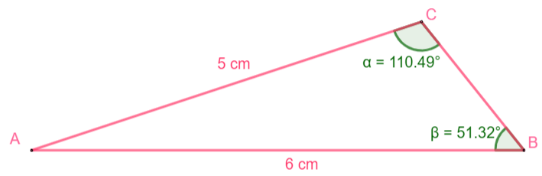
Pour plus d'exercices accompagnés de leurs corrigés, n'hésitez pas à commander l'un des packs disponibles sur ce site, dans l'onglet Commander.

Corrigés

Exercice 1

Dans chacun des cas, donner le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (arrondir au centième).

Cas 1 :



Comme la somme des angles d'un triangle fait 180°, on a alors :

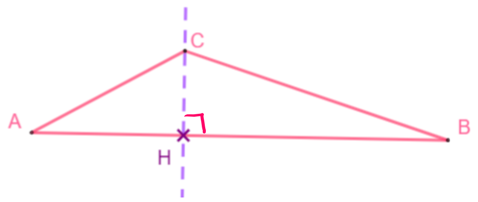
$$\widehat{BAC} = 180 - 110{,}49 - 51{,}32 = 18{,}19°$$

$$\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})}$$

Donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 5 \times \cos 18{,}19°$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28{,}50$$

Cas 2 :



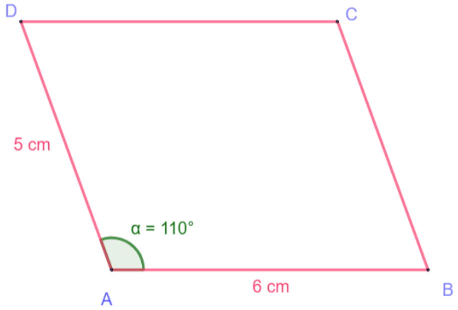
On donne $AH = \frac{1}{3}AB$ et $AB = 6cm$.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times \frac{1}{3}AB$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times \frac{6}{3}$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12$$

Exercice 2 :

Soit un parallélogramme $ABCD$, tel que $AB = 6\ cm$, $AD = 5\ cm$ et $\widehat{DAB} = 110°$.



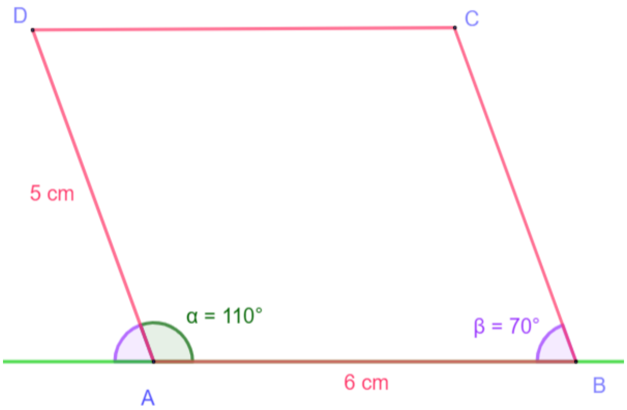
Calculer les produits scalaires suivants (arrondir au dixième) :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AD}\| \times \cos(\widehat{DAB})$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 6 \times 5 \times \cos(110°)$$
$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -10,3}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}$$



Les **angles violets** sont des angles **correspondants**, et comme les droites (DA) **et** (BC) (qui portent ces angles) sont **parallèles**, alors ces angles sont **égaux**.

L'angle violet et l'angle vert forment un angle plat $(180°)$, donc l'angle violet fait $70°$ $(180° - 110°)$.

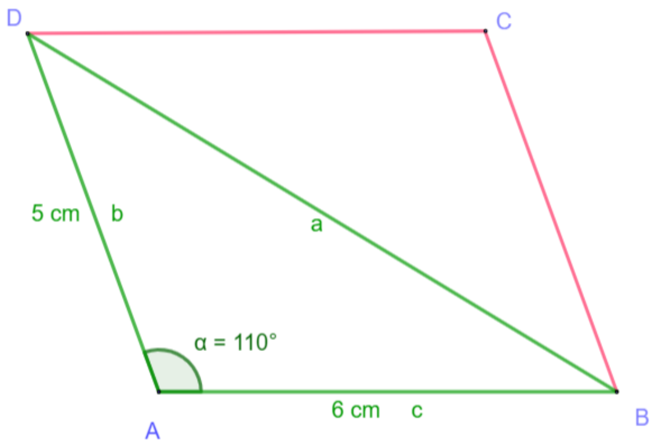
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(\widehat{ABC})$$
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 6 \times 5 \times \cos(70°)$$
$$\boldsymbol{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 10,3}$$

$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(DB^2 + DC^2 - BC^2)$$

Ici, il nous manque la norme de $\overrightarrow{DB}$, mais nous pouvons la trouver grâce à la formule d'Al-Kashi.

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})}$$



On a :

$$DB^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \times AD \times AB \times \cos(\widehat{DAB})$$
$$DB^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \cos(110°)$$
$$DB^2 = 81{,}52$$
$$DB = \sqrt{81{,}52} = 9{,}03\ cm$$

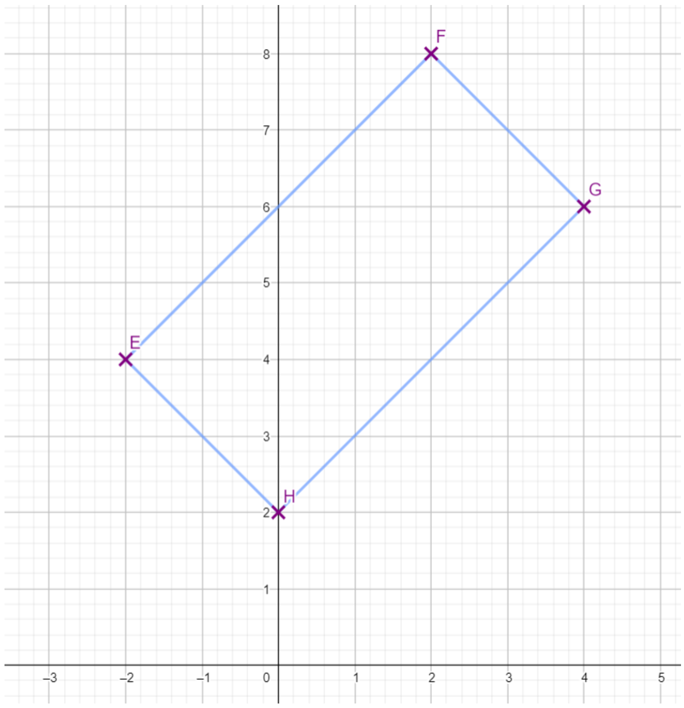
$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(81{,}52 + 36 - 25)$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 46{,}26}$$

Exercice 3 :

Soient les points $E(-2\ ;\ 4)$, $F(2\ ;\ 8)$, $G(4\ ;6)$ et $H(0\ ;2)$.

1) Représenter ces points dans un repère orthonormé.



2) Calculer $\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{FH}$; $\overrightarrow{FG}$; $\overrightarrow{HG}$.

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-2) \\ 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FH} = \begin{pmatrix} x_H - x_F \\ y_H - y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} x_G - x_F \\ y_G - y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 6-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} x_G - x_H \\ y_G - y_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3) Calculer $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FH}$; $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG}$.

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FH} = 4 \times (-2) + 4 \times (-6) = -8 - 24 = -32$$

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG} = 4 \times 2 + 4 \times (-2) = 8 - 8 = 0$$

4) Justifier que $EFGH$ soit un rectangle.

On sait que dans le quadrilatère $EFGH$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.
Or, si on joint les extrémités de deux vecteurs égaux, alors on obtient un parallélogramme.
Donc $EFGH$ est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$$

$$\text{Donc } (EF) \perp (FG)$$

On sait que dans le parallélogramme $EFGH$, $(EF) \perp (FG)$.
Or, si un parallélogramme possède au moins un angle droit, alors c'est un rectangle.
Donc $EFGH$ est un rectangle.